

LUN 16-18

VEN 14:10 → 16

DIDATTICA → ²⁰²⁰⁻²¹ SISTEMI DINAMICI

- P. GLENDINNING "Stability, instability and chaos"
- G.G. LAYEK "An introduction to dynamical systems and chaos"

→ Esercizi.

→ Ricicimento (o appunto)

Sistemi dinamici (Teoria dei)

- Equazioni differenziali e le soluzioni
- POINCARÉ → studio qualitativo delle soluzioni e del loro comportamento asintotico

- Def. Un sistema dinamico è una terna (X, G, S) dove X è un insieme, G è un (semi-)gruppo con e identità, S è un'azione di G su X , ossia

$$S : G \times X \rightarrow X \text{ d.c. } S(e, x) = x \quad \forall x \in X$$

$$\text{e } S(g_1, S(g_2, x)) = S(g_1 g_2, x) \quad \forall x \in X \\ \forall g_1, g_2 \in G$$

ES $G = M(n \times n, \mathbb{R}) \quad S: G \times G \rightarrow G$
 $S(M, N) = M \cdot N$

ES $X = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}$ e S è generata dal flusso di un'eq. diff. ordinaria autonoma.

$\dot{x} = F(x)$, $F \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ^{campo di vettori} $\forall$ c. valgono
 unicità locale delle soluzioni e soluz. def. su $\mathbb{R}$.

Il flusso dell'eq. diff. è $\phi(t, x_0)$ $\forall$ c.

$$\frac{d}{dt} \phi(t, x_0) = F(\phi(t, x_0)) \quad \text{e} \quad \phi(0, x_0) = x_0$$

$$S: \mathbb{R} \times X \rightarrow X \quad \text{t.c.} \quad S(t, x_0) = \phi(t, x_0)$$

$$S(0, x_0) = x_0, \quad S(t_2, S(t_1, x_0)) = S(t_1 + t_2, x_0)$$

SISTEMI DINAMICI CONTINUI

ES $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ opp. $\mathbb{Z}$

$$T: X \rightarrow X \quad \text{e}$$

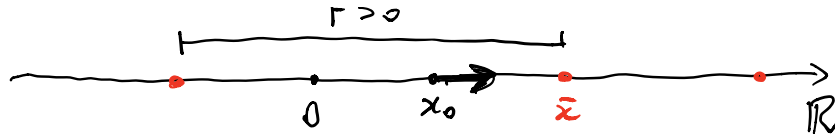
$$S(n, x) = T^n(x) = \begin{cases} \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n\text{-volte}}(x), & n \geq 0 \\ \underbrace{T^{-1} \circ T^{-1} \circ \dots \circ T^{-1}}_{|n|\text{-volte}}(x), & n < 0 \end{cases}$$

Solo se T è invertibile $\rightarrow$

SISTEMI DINAMICI DISCRETI



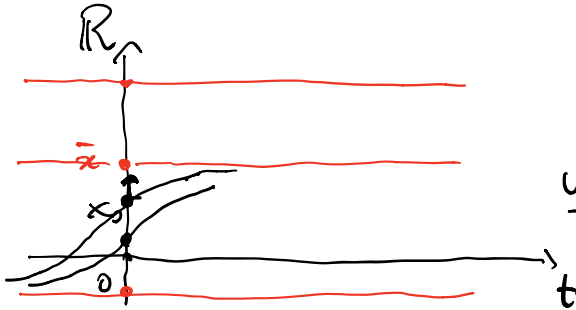
Esempi $n=1$ ODE su $\mathbb{R}$ $\dot{x} = F(x)$, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



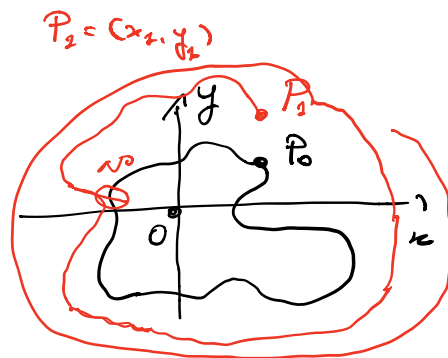
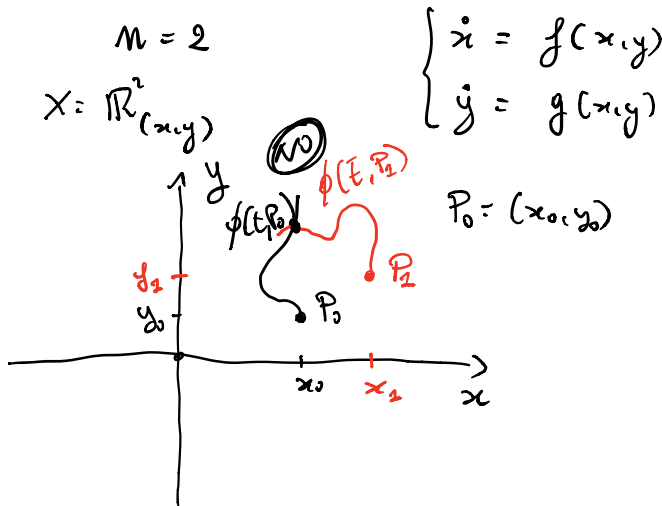
$$\phi(t, x_0)$$

$$\text{Punti fissi} = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\}$$

$$\text{Se } \bar{x} \text{ è p.c. } F(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \text{ ha } \phi(t, \bar{x}) \equiv \bar{x}$$

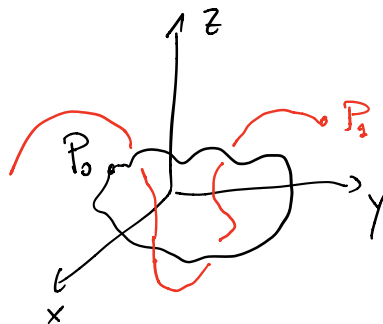


Unicità locale $\Rightarrow$ non intersezione delle soluz.



$$\bigcup_{t \geq 0} \phi(t, P_0)$$

$$n = 3$$



Completamente
 "caotico" è
 presente solo
 su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

(attrattore di Lorenz (meteorologia))

$$\begin{cases} \dot{x} = \dots \\ \dot{y} = \dots \\ \dot{z} = \dots \end{cases} \quad \begin{matrix} P_0 \rightarrow (\dots) \\ P_0 + \varepsilon \rightarrow (\dots) \end{matrix} \quad \#$$

OSS $\dot{x} = F(x, t) \quad y = (x, t) \quad \tilde{F}(y) = (F(x, t), 1)$

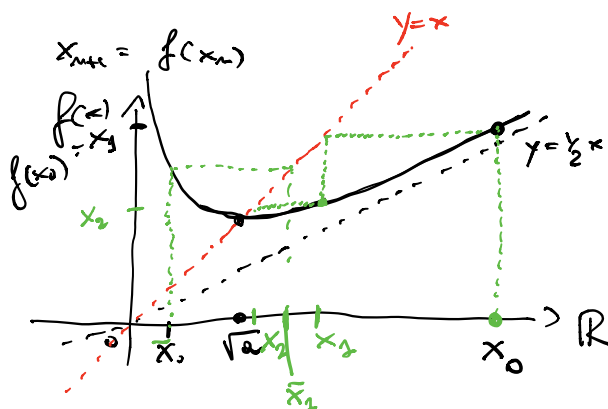
$$\dot{y} = \tilde{F}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

←—————→

ES Successioni definite per ricorrenza

$$\{x_n\}_{n \geq 0} \subset X \quad \begin{cases} x_0 = \bar{x} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \quad f: X \rightarrow X$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad a > 0$$



$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

$$f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad l = f(l) \quad \text{punto fisso}$$

$\{x_n\}$ è monotona (definitivamente) $\Rightarrow l = \sqrt{a}$
è il limite di $\{x_n\}$

ES

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2^{n-3} x_{n-2} + x_{n-3} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

oss Ricordiamo che $\ddot{x} = f(x) + \dot{x}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) + y \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$y_n = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, n)$$

$$y_{n+1} = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, n+1) = (x_n + 2^{n+2} x_{n+1} + x_{n+2}, x_n + x_{n+1}, n+1)$$

$$= f(y_n)$$

$$f(a, b, c, d) = (a + 2^{d+2} b + c, a + b, d+1)$$

←

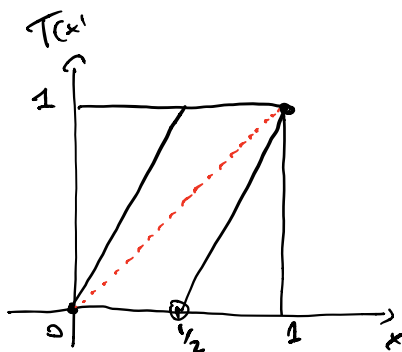
$$n=1$$

$$X = [0, 1]$$

$$T: X \rightarrow X$$

• mappa di Bernoulli

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x-1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, T \in C^0$$



$$x=0 \Rightarrow T(0)=0 \Rightarrow T^2(0)=$$

$$= T(T(0)) = T(0) = 0$$

$$T^n(0)=0 \quad \forall n \geq 0.$$

$$x=1 \Rightarrow T(1)=1$$

$$\Rightarrow T^n(1)=1 \quad \forall n \geq 0$$

$x \in [0, 1]$ • $\exists$ un modo di "dare inf" su $T^n(x)$?

• dato n , sapere dire se $T^n(x) \geq \frac{1}{2}$?

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\xi_i}{2^i}, \quad \xi_i \in \{0, 1\}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} + \dots = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Per q.o. $x \in (0,1)$ $x \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$T(x) \longleftrightarrow (\xi_2, \xi_3, \dots)$$

$$T^M(x) \longleftrightarrow (\xi_{M+1}, \xi_{M+2}, \dots)$$

$$T^M(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi_{M+1} = 1$$

$$< \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi_{M+1} = 0$$

CHAOS
DETERMINISTICO

Sistemi dinamici continui

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, campo di vettori, $F \in C^1$

$$\dot{x} = F(x) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Prob di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ flusso $\phi(x_0, t)$

oss $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, S)$ $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(t, x_0) \mapsto \phi(x_0, t)$

Def. Si chiama ORBITA POSITIVA di $x \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\mathcal{O}^+(x) := \bigcup_{t \geq 0} \phi(x, t)$$

$$(\mathcal{O}^-(x) := \bigcup_{t \leq 0} \phi(x, t))$$

Si chiama ORBITA di $x \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\mathcal{O}(x) := \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}^-(x)$$

oss $\mathcal{O}^\pm(x) \subset \mathbb{R}^n$, per l'unicità locale si ha

$$x \neq y \quad \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \begin{cases} = \emptyset \\ = \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y) \end{cases}$$

oss TRAJECTORY = ORBITA

DEF Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice FISSO (opp. STAZIONARIO)

$$x \text{ FISSO} \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x, t) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}(\underline{x}) = \{ \underline{x} \}$$

DEF

Un punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice PERIODICO di PERIODO MINIMO $T > 0$ se $\forall t \in \mathbb{R}$ valga

$$\phi(\underline{x}, t+T) = \phi(\underline{x}, t)$$

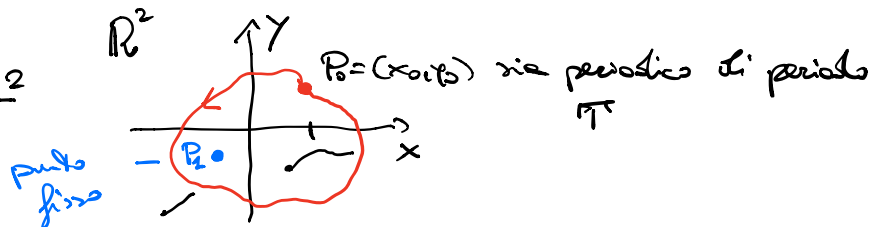
$$\text{e } \phi(\underline{x}, t+s) \neq \phi(\underline{x}, t) \quad \forall s \in (0, T).$$

L'orbita di un punto periodico di periodo minimo T

è $\mathcal{O}(\underline{x}) = \bigcup_{t=0}^T \phi(\underline{x}, t)$, ed è una curva chiusa.

OSS

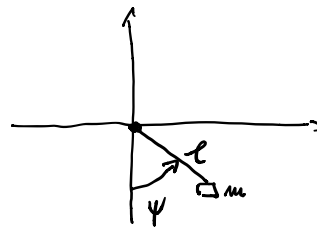
1. $n=2$



2. È estremamente difficile in generale mostrare l'esistenza di orbite periodiche.

Esempio Il moto di un pendolo

$$\vec{F} = (0, -mg)$$



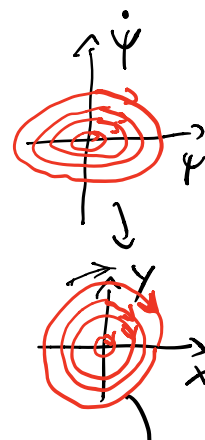
$$l \ddot{\psi} = -g \sin \psi$$

• $\psi \approx 0$ (piccole oscillazioni)

$$\sin \psi \approx \psi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \psi$$

Mostriamo che esistono orbite periodiche.

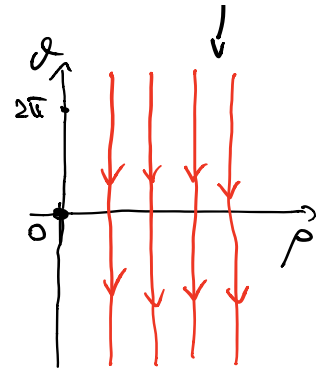
$$x = \sqrt{\frac{g}{l}} \psi, \quad y = \dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{l}} y \\ \dot{y} = -\sqrt{\frac{g}{l}} x \end{cases}$$



$$\rightarrow x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \\ \dot{\vartheta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2} \end{cases} \begin{matrix} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} y + y \cdot (-\sqrt{\frac{g}{2}} x)}{\rho} = 0 \\ \dot{\vartheta} = \frac{-x^2 \sqrt{\frac{g}{2}} - y^2 \sqrt{\frac{g}{2}}}{\rho^2} = -\sqrt{\frac{g}{2}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\vartheta} = -\sqrt{\frac{g}{2}} \end{cases}$$

$$\vartheta(t) = -\sqrt{\frac{g}{2}} t + \vartheta_0$$

$$\rho(t) = \rho_0$$

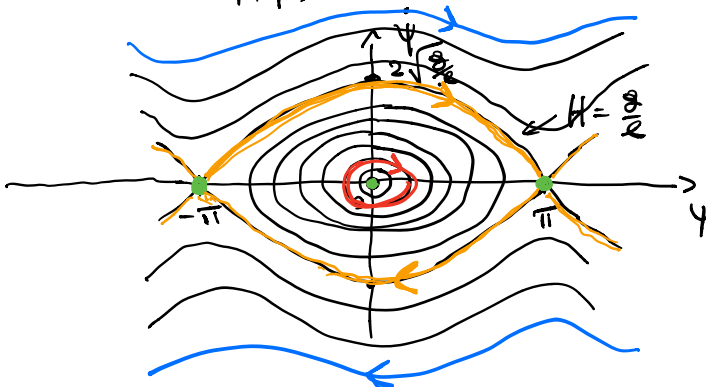
$$\bullet \quad \psi \gg 0 \quad l \ddot{\psi} = -g \sin \psi$$

$$l \dot{\psi} \ddot{\psi} = -g \dot{\psi} \sin \psi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l \dot{\psi}^2 \right) = \frac{d}{dt} (g \cos \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{g}{l} \cos \psi \right) = 0 \quad \text{lungo le soluzioni}$$

$$H(\psi, \dot{\psi}) = \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{g}{l} \cos \psi = \text{cost} \quad \text{lungo le soluzioni}$$



$$H(0,0) = -\frac{g}{l} = \min H$$

$$H(\pi,0) = \frac{g}{l} = H(-\pi,0)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 = 2 \frac{g}{l}$$

$$\dot{\psi} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = (\pi,0) \quad P_3 = (-\pi,0) \quad \text{FISSI}$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{L} \sin \psi \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{L} \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ -\frac{g}{L} \sin x=0 \end{cases}$$

DEF $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice ^(NEGATIVAMENTE) POSITIVAMENTE INVARIANTE se
 $\forall \underline{x} \in A$ si ha $\phi(\underline{x}, t) \in A \quad \forall t \geq 0$
 $(\forall t \leq 0)$

$A \subset \mathbb{R}^n$ si dice INVARIANTE se $\forall \underline{x} \in A$ si ha
 $\phi(\underline{x}, t) \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ES
$$\begin{cases} \ddot{x} = x = f(x, y) \\ \ddot{y} = y^2 + x = g(x, y) \end{cases}$$

$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

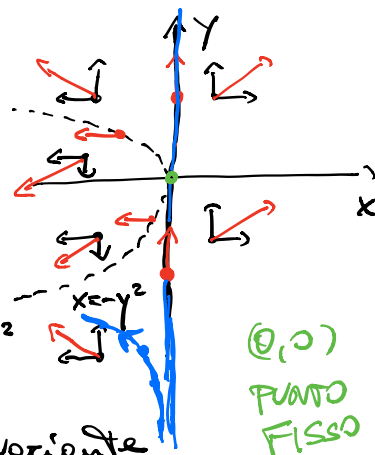
$f(x, y) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$g(x, y) > 0 \Leftrightarrow y^2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -y^2$

L'insieme $A = \{x=0\}$ è invariante

$I(x, y) = x \quad \frac{d}{dt} I(x(t), y(t)) \Big|_A = \dot{x}(t) \Big|_A = x(t) \Big|_A = 0$

no fuori da A



$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$ Computamento asintotico delle orbite

• punti fissi • orbite periodiche • insiemi invarianti

DEF Dato un punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ si chiama ω -LIMITE di $\underline{x}$

$$\omega(\underline{x}) := \left\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m / \exists t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ t.c. } \phi(\underline{x}, t_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \underline{y} \right\}$$

Si chiama α -LIMITE di $\underline{x}$

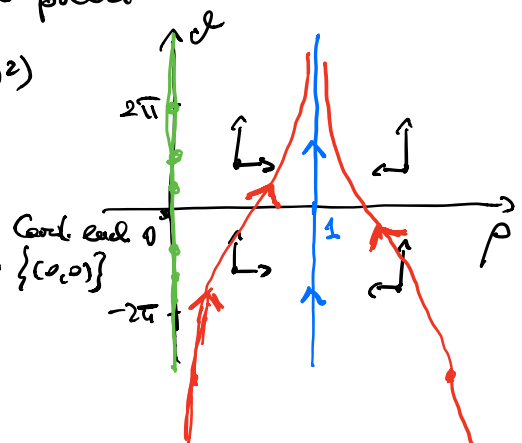
$$\alpha(\underline{x}) := \left\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^m / \exists t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} -\infty \text{ t.c. } \phi(\underline{x}, t_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \underline{y} \right\}$$

ES $n=1$ $\dot{x} = x \quad \forall x > 0 \quad \omega(x) = \phi$
 $\phi(x, t) = x e^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$

ES $n=2$ In coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) \\ \dot{\vartheta} = \rho \end{cases}$$

Punti fissi = $\{ (0, \vartheta) \} \leftrightarrow \{ (0, 0) \}$



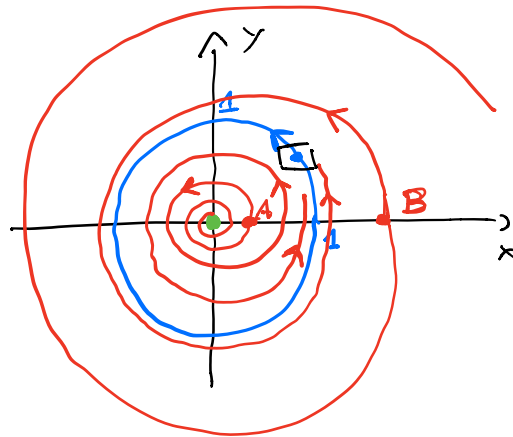
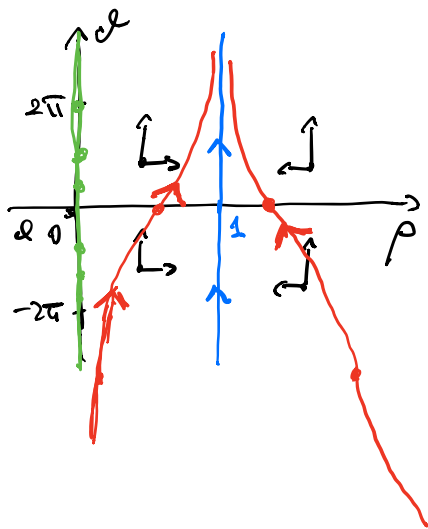
$$I(\rho, \vartheta) = \rho$$

$$\left. \frac{d}{dt} I(\rho(t), \vartheta(t)) \right|_{\rho=1} = \dot{\rho}(t) = \rho(t)(1-\rho(t)^2) \Big|_{\rho=1} = 0$$

$A = \{ \rho = 1 \}$ $\bar{A}$ in insieme invariante

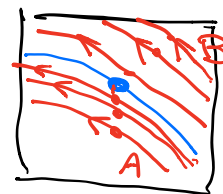
$\updownarrow$ Coord. euclidee

$$\{ x^2 + y^2 = 1 \}$$



$$\omega(A) = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\alpha(A) = \{(0,0)\}$$



$$\omega(B) = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\alpha(B) = \emptyset$$

Proposizione Sia $\dot{x} = F(x)$ in $\mathbb{R}^n$ con flusso $\varphi(x, t)$.

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $\mathcal{O}^+(x)$ è limitato allora

$\omega(x)$ è un insieme non vuoto, compatto e invariante.

$$\underline{\text{dim}} \quad \omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty \text{ t.c. } \varphi(x, t_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y \right\}$$

Scegliamo $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ che sia crescente strettamente
e $\tau_0 = 0$, $\tau_j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} +\infty$. Consideriamo $x_j = \varphi(x, \tau_j)$

$$\text{allora} \quad \omega(x) = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{\mathcal{O}^+(x_j)} \quad (*)$$

$$\left[\underline{\text{dim}}(x) \subset \text{è ovvia, segue } \omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}^+(x_j)} \right]$$

$$\supset y \in \bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{\mathcal{O}^+(x_j)} \quad \text{allora} \quad \forall j$$

$$\forall j \quad \exists \left\{ \sum_m^j \right\}_m \subset \mathcal{O}^+(x_j) \text{ t.c. } \sum_m^j \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} y$$

$$\Leftrightarrow \forall j \quad \exists \{t_m^j\}_m \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } \varphi(x_j, t_m^j) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} y$$

$$\left[\varphi(x_j, t_m^j) = \varphi(\varphi(x, \tau_j), t_m^j) = \varphi(x, \tau_j + t_m^j) \right]$$

$$\Leftrightarrow \forall j \quad \exists \{t_m^j\}_m \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } \varphi(x, \tau_j + t_m^j) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} y$$

Allora esiste una successione estratta da $\{\tau_j + t_m^j\}_{m,j}$

$$\{ \tau_j + t_m^j \}_{m,j} \text{ t.c. } \tilde{t}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty \text{ e } \varphi(x, \tilde{t}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y$$

$$\Rightarrow y \in \omega(x)$$

Da (*) segue che $\omega(x)$ è intersezione di infiniti chiusi, limitati (perché $\mathcal{O}^+(x)$ è limitato), e

$$\mathcal{O}^+(x_j) \supset \mathcal{O}^+(x_{j+1}) \quad \forall j. \Rightarrow \omega(x) = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{\mathcal{O}^+(x_j)}$$

è non-vuoto e compatto.

Resta da mostrare che $w(x)$ è invariante, ossia che $\forall y \in w(x)$ si ha $\varphi(y, t) \in w(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Il flusso è una funzione continua su $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

Se $y \in w(x)$, $\exists t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ t.c. $\varphi(t_k, x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$

e quindi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+t_k, x) = \varphi(t, \varphi(t_k, x)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{continuità su } \mathbb{R}^m} \varphi(t, y)$$

Perché $\{t+t_k\}_k$ è divergente si ha

$$\varphi(t, y) \in w(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

←-----→
SISTEMI LINEARI IN $\mathbb{R}^m$

$$A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \quad \dot{x} = Ax$$

TEOREMA Supponiamo che A abbia k autovalori reali distinti $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ e $m = \frac{1}{2}(n-k)$ coppie distinte di autovalori complessi coniugati $\{a_j \pm i b_j\}_{j=1}^m$. Allora

$$\exists P \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } P^{-1}AP =: \Lambda \text{ t.c.}$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, B_1, B_2, \dots, B_m)$$

dove $B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, e inoltre il flusso

$$\text{di } \dot{x} = Ax \text{ è } \varphi(x, t) = e^{At}x = P e^{\Lambda t} P^{-1}x$$

dove $e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, e^{tB_1}, \dots, e^{tB_m})$

dove $e^{tB_j} = e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix}$

ES $A \approx \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$
 $\mu^\pm = 1 \pm i2$

$e^{At} = e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \cos 2t & -e^t \sin 2t \\ 0 & 0 & e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \underline{x} \in \mathbb{R}^4$ $\varphi(\underline{x}, t) = e^{At} \underline{x} = \begin{pmatrix} e^{3t} x_1 \\ e^{-t} x_2 \\ e^t (\cos 2t - \sin 2t) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$t \rightarrow +\infty \quad |e^{3t} x_1| \rightarrow +\infty$

$e^{-t} x_2 \rightarrow 0$

$\underbrace{|e^t (\cos 2t - \sin 2t) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}|}_{\text{rotazione}} \rightarrow +\infty$

Punti fissi, orbite periodiche, comp. asintotico.

$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$

Punti fissi = $\{A \underline{x} = \underline{0}\} = \text{Ker}(A)$

$\underline{0} \in \text{Ker}(A)$

Orbite periodiche esistono in corrispondenza di autovalori di A puramente immaginari $\pm i b_j$.

E_{b_j} sottospazio 2×2 trovo che il flusso è dato da $\exp\left[\begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix} t\right] = \begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix}$

ES Autovalori multipli in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. (autov. reali)

$n=2$ A ha autov. λ con $m_\lambda=2$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ opp. } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \text{ opp. } e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \text{ t.c. } N^2=0. \text{ Allora} \right.$$

$$e^{\Lambda t} = e^{(\lambda t I + t N)} = \underbrace{e^{\lambda t} \cdot I}_{I \text{ e } N \text{ commutano}} \cdot e^{t N} = e^{\lambda t} e^{t N}$$

$$e^{t N} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I + t N + \underbrace{\frac{t^2}{2!} N^2 + \dots}_0$$

$$= I + t N = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left. \right]$$

$n=3$ Se la mult. alg. degli autov. ≤ 2 , siamo nel caso precedente $\left[\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \right]$

Quindi supponiamo che A abbia autovalore

λ con $m_\lambda = 3$ e $m_\lambda = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \quad \text{t.c. } N^3 = 0$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caratterizzazione dinamica

Def. Data $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, indichiamo con E_λ l'autospazio generalizzato relativo ad un autovalore λ di A .

Si definiscono:

- autospazio stabile di 0

$$E^s(0) := \text{Span} \{ v \in E_\lambda : \lambda \text{ autov. di } A \text{ con } \text{Re } \lambda < 0 \}$$

- autospazio centrale di 0

$$E^c(0) := \text{Span} \{ v \in E_\lambda : \lambda \text{ autov. di } A \text{ con } \text{Re } \lambda = 0 \}$$

- autospazio instabile di 0

$$E^u(0) := \text{Span} \{ v \in E_\lambda : \lambda \text{ autov. di } A \text{ con } \text{Re } \lambda > 0 \}$$

Teorema Data $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ si ha:

- $\dim E^s(0) + \dim E^c(0) + \dim E^u(0) = n$
- $E^s(0), E^c(0), E^u(0)$ sono invarianti per

$$\dot{x} = Ax$$

(ii) Considerando $\varphi(x, t)$ il flusso di $\dot{x} = Ax$ si ha

$$E^s(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\}$$

$$E^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}$$

dim (i) ovvio

$$(ii) \varphi(x, t) = P e^{At} P^{-1} x$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow E_\lambda \text{ \u00e8 invariante} \\ \forall \lambda \text{ autovalore}$$

(iii) Se λ \u00e8 autov. di A con $\operatorname{Re} \lambda < 0$

$$\text{allora } e^{At} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \square & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \vdots & \vdots \\ 0 & e^{\lambda t} & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Se λ \u00e8 autov. di A con $\operatorname{Re} \lambda > 0$

$$e^{\lambda t} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow -\infty \quad \square$$

$$\text{oss} \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x, t) \rightarrow (?) \text{ per } t \rightarrow +\infty\} = E^u(0)$$

$\notin \mathbb{R}^n$

$\cdot E^c(0)$ ha caratter. dinamica? NO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{opp. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

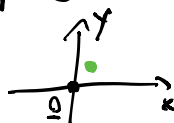
$$\text{autov.} = \{0\}$$

$$\text{con } m_0 = 2$$

$$\dim E^c(0) = 2$$

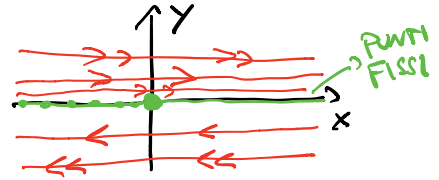
$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x, y, t) = (x, y)$$



$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(x, y, t) = (x + yt, y)$$

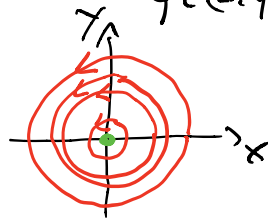


$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim E^c(\underline{0}) = 2$$

$$\text{eigen} = \{+i, -i\}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$\varphi(x, y, t) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$



ES

$$n=3$$

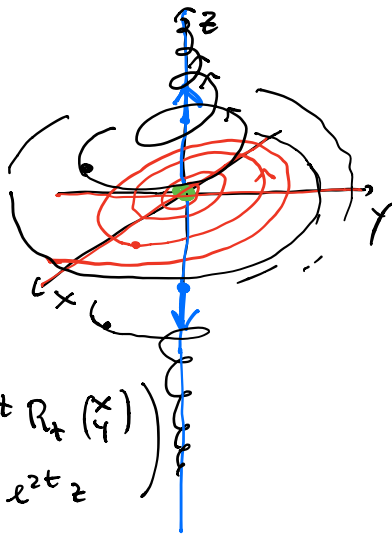
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori di A

$$= \{2, -1 \pm i\}$$

$$E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\}, \quad E^s(\underline{0}) = \text{span}\{e_1, e_2\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E^u(\underline{0}) = \text{span}\{e_3\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} R_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} R_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ e^{2t} z \end{pmatrix}$$

ES

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & +1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = -y - 2z \end{cases}$$

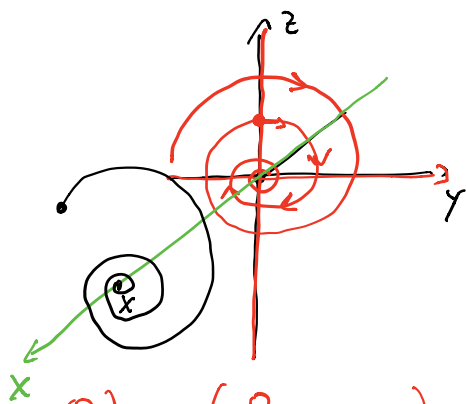
Autov. di $A = \{0, -2 \pm i\}$

$$\dim E_0 = \dim E^c(0) = 1$$

$$E^u(0) = \{0\}$$

$$E^s(0) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

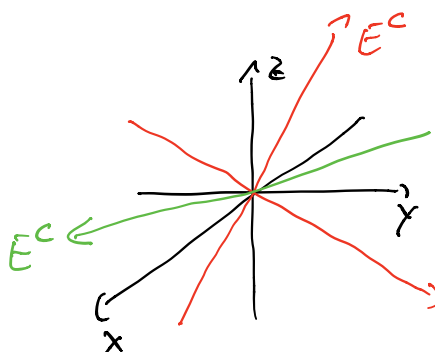
$$E^c(0) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} R_{-t} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ e^{-2t} R_{-t} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$



Sistemi lineari in $\mathbb{R}^2$

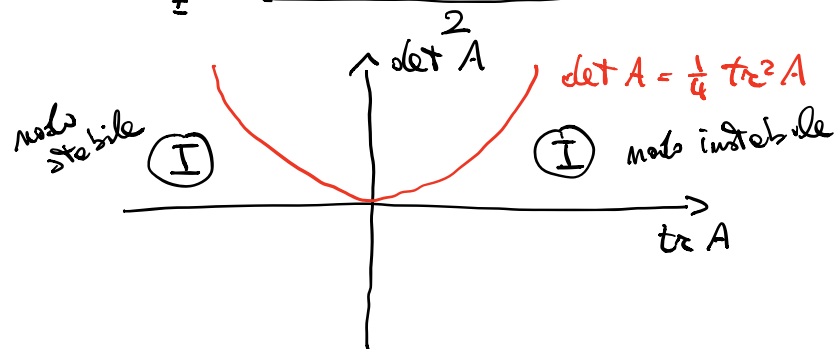
$$A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \quad \dot{x} = A x \quad \varphi(x, t) = e^{At} x.$$

$$x = (x, y) \quad \text{punto fisso} \quad 0 = (0, 0)$$

Polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$



$$\textcircled{I} \quad \det A > 0, \quad (\text{tr} A)^2 - 4 \det A > 0$$

A ha due autovalori reali e distinti.

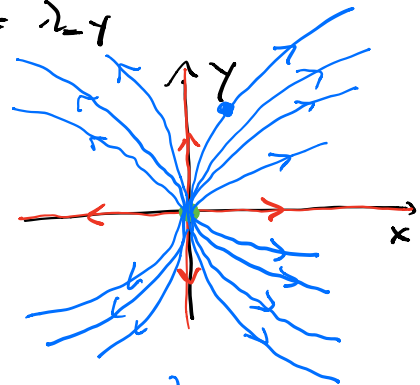
$$\text{Se } \text{tr} A > 0 \quad \text{allora} \quad \lambda_+ > \lambda_- > 0$$

$$\underline{\text{Esempio}} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda_+ x \\ \dot{y} = \lambda_- y \end{cases}$$

$$x(t) = e^{\lambda_+ t} x_0, \quad y(t) = e^{\lambda_- t} y_0$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow y(t) = 0$$



$$x_0 \neq 0 \text{ e } y_0 \neq 0 \Rightarrow y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \quad 1 > \frac{\lambda_-}{\lambda_+} > 0$$

$$e^{\lambda_- t} = \frac{y}{y_0} \quad e^{\lambda_+ t} = (e^{\lambda_- t})^{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \quad \frac{x}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0} \right)^{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}$$

Esempio:

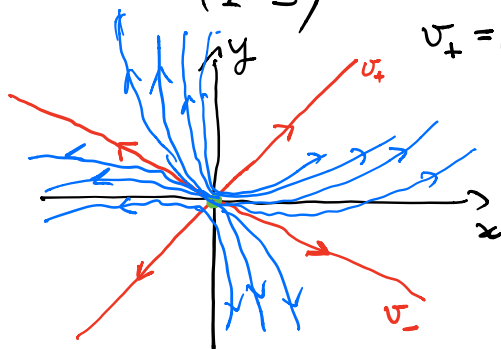
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_+ = 4$$

$$\lambda_- = 1$$

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_- = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$\underline{0} = (0,0)$ è un NODO INSTABILE

$$E^u(\underline{0}) = \mathbb{R}^2, \quad E^s(\underline{0}) = E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$$

Se $\text{tr } A < 0$ allora $\lambda_- < \lambda_+ < 0$

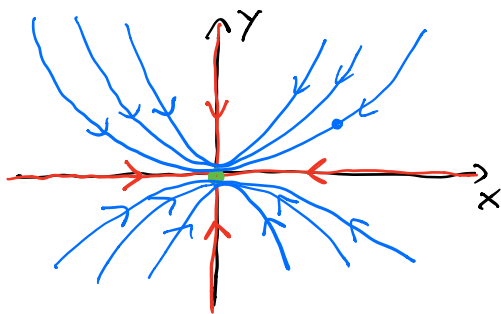
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}$$

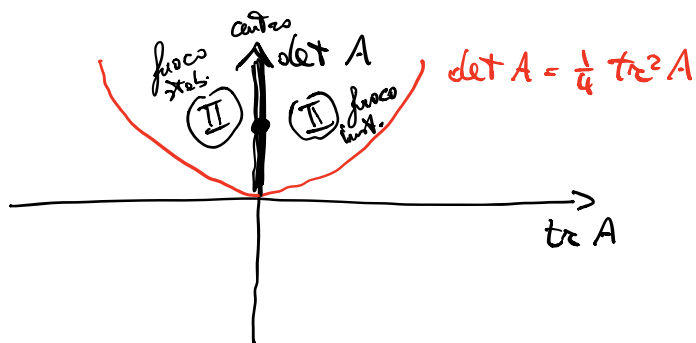
$$x_0 \neq 0 \text{ e } y_0 \neq 0$$

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} > 1$$



$\underline{0} = (0,0)$ è un NODO STABILE

$$E^s(\underline{0}) = \mathbb{R}^2, \quad E^u(\underline{0}) = E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$$



(II) $\det A > 0$, $\text{tr}^2 A - 4 \det A < 0$

A ha una coppia di autovalori complessi coniugati

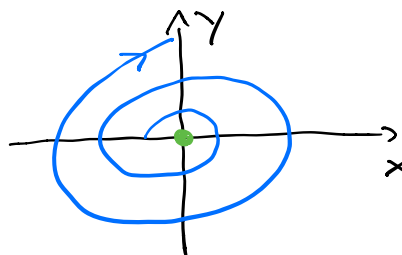
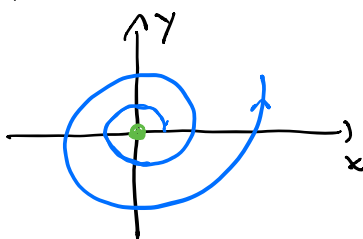
e $\text{Re}(\lambda_{\pm}) = \frac{1}{2} \text{tr} A$ $\lambda_{\pm} = a \pm ib$

$$A \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$e^{At} \sim e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{tr} A$$

• $\text{tr} A > 0$

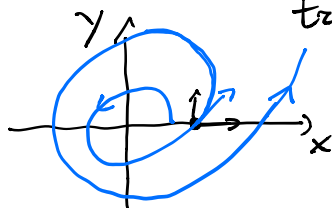


Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

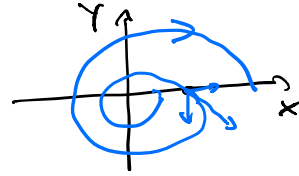
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} A = 2 \quad \det A = 3 > \frac{1}{4} \text{tr}^2 A = 1$$



Exemplo

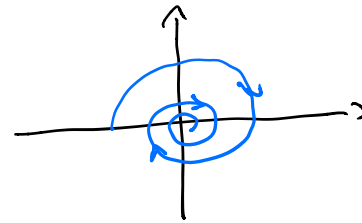
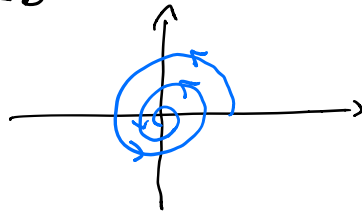
$$\begin{cases} \dot{x} = x+y \\ \dot{y} = -2x+y \end{cases}$$



$\underline{0} = (0,0)$ é um FOCO INSTÁVEL

$$E^s(\underline{0}) = E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\} \quad E^u(\underline{0}) = \mathbb{R}^2$$

• $\text{tr } A < 0$

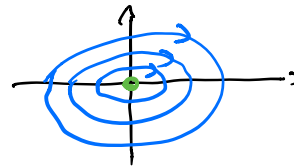
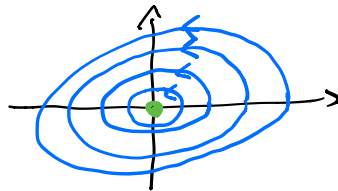


$\underline{0} = (0,0)$ é um FOCO STÁVEL

$$E^u(\underline{0}) = E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\} \quad E^s(\underline{0}) = \mathbb{R}^2$$

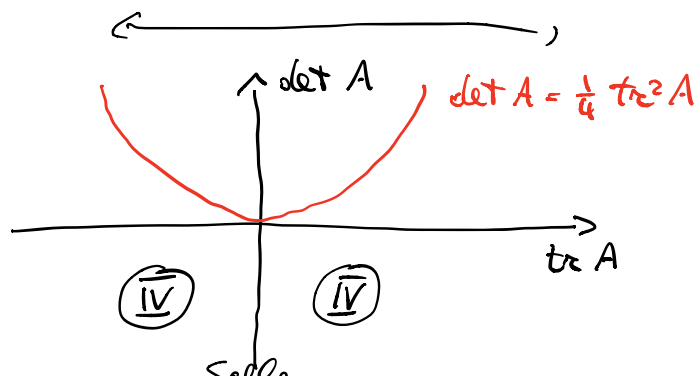
• $\text{tr } A = 0$

$$e^{At} \sim \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$



$\underline{0} = (0,0)$ é um CENTRO

$$E^c(\underline{0}) = \mathbb{R}^2 \quad E^s(\underline{0}) = E^u(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$$



→ exam

(IV) $\det A < 0$ ($\forall z^2 A - 4 \det A > 0$)

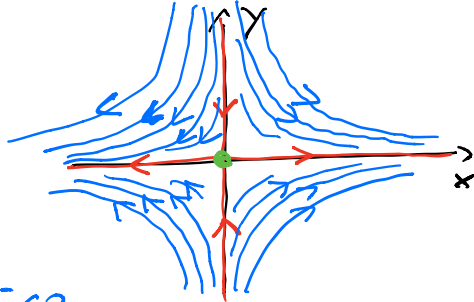
A ha due autovalori reali discesi $\lambda_- < 0 < \lambda_+$

Esempio $A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$

$y(t) = e^{\lambda_+ t} y_0, \quad x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$
 $x(t) = e^{\lambda_- t} x_0, \quad y_0 = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t$

$x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0, \quad y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}$

$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} < 0$



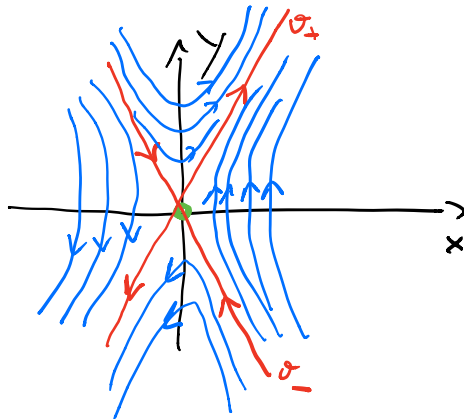
$E^s(\underline{0}) = \{x=0\} \quad E^u(\underline{0}) = \{y=0\} \quad E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$

$\{(x, y) / \varphi((x, y), t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} (0, 0)\} \quad \{(x, y) / \varphi((x, y), t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} (0, 0)\}$

$\underline{0} = (0, 0)$ è una SELLA

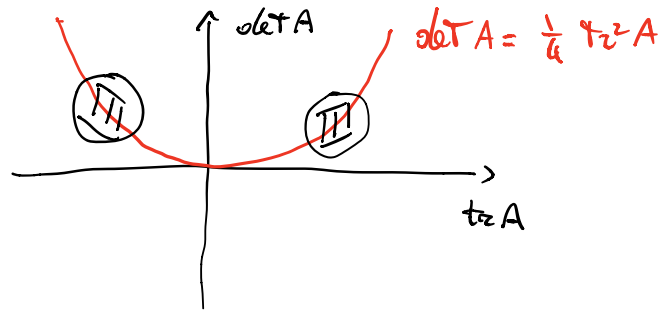
Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_+ = 2 \quad \lambda_- = -2$

$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$E^s(\underline{0}) = \text{span}(\sigma_-)$

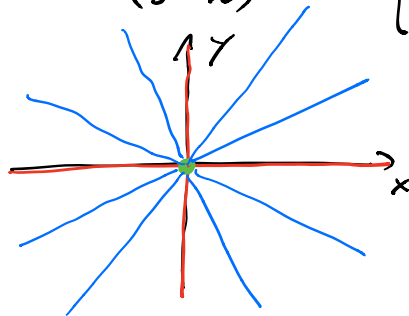
$E^u(\underline{0}) = \text{span}(\sigma_+)$



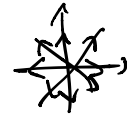
(II) $\det A > 0$, $\text{tr}^2 A - 4 \det A = 0$

A ha un unico autovalore doppio $\lambda = \frac{1}{2} \text{tr} A \neq 0$

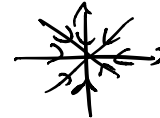
• $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$ $\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$



$\lambda > 0$



$\lambda < 0$



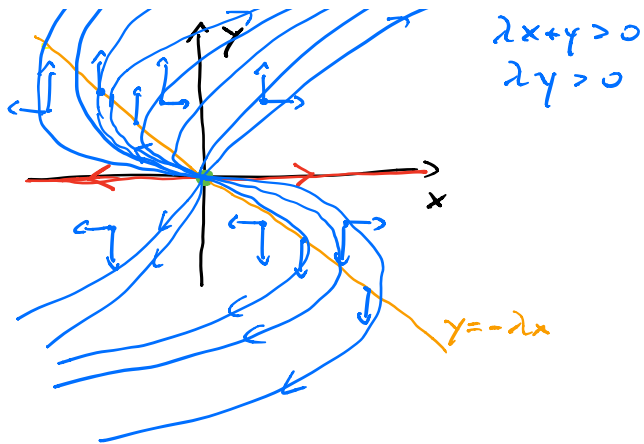
$\underline{Q} = (q_0)$ è una STELLA INSTABILE se $\lambda > 0$
 STELLA STABILE se $\lambda < 0$

• $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t}(x_0 + t y_0) \\ y(t) = e^{\lambda t} y_0 \end{cases}$
 soluz.

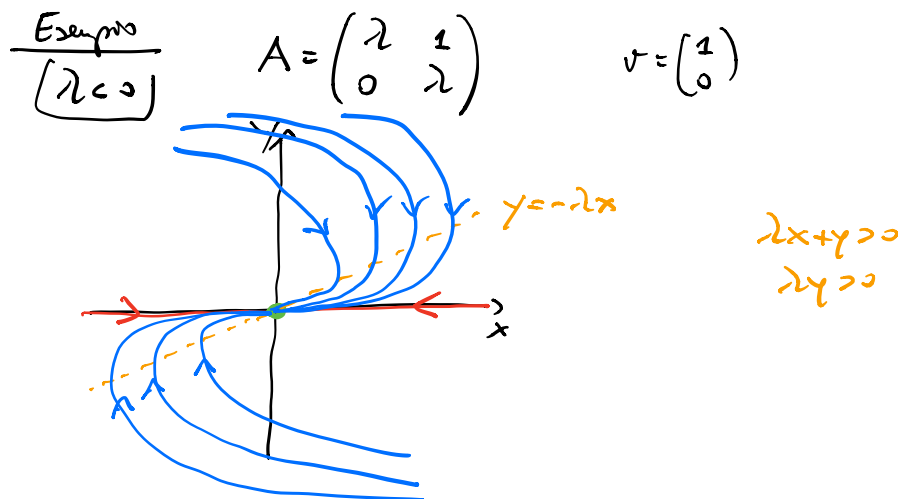
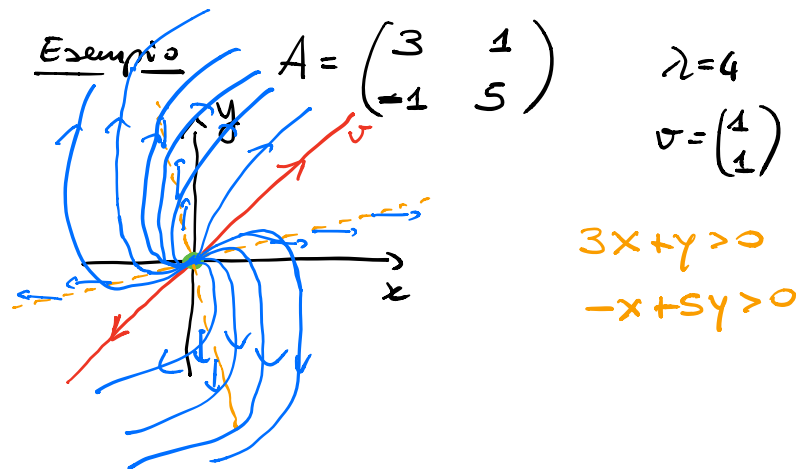
$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unico autovettore
 $\boxed{\lambda > 0}$



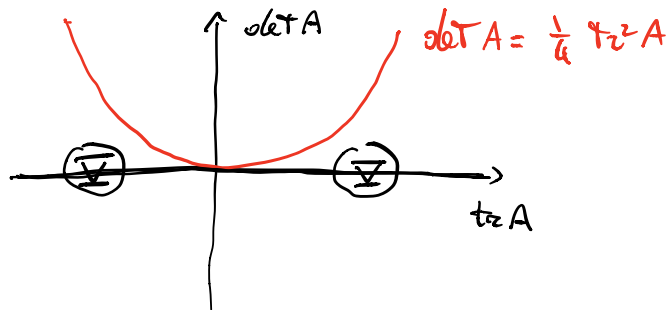


$\underline{0} = (0,0)$ é um NÓDO IMPROPRIO INSTÁVEL
 $E^s(\underline{0}) = E^c(\underline{0}) = \{\underline{0}\}$ $E^u(\underline{0}) = \mathbb{R}^2$



$\underline{0} = (0,0)$ é um NÓDO IMPROPRIO STÁVEL

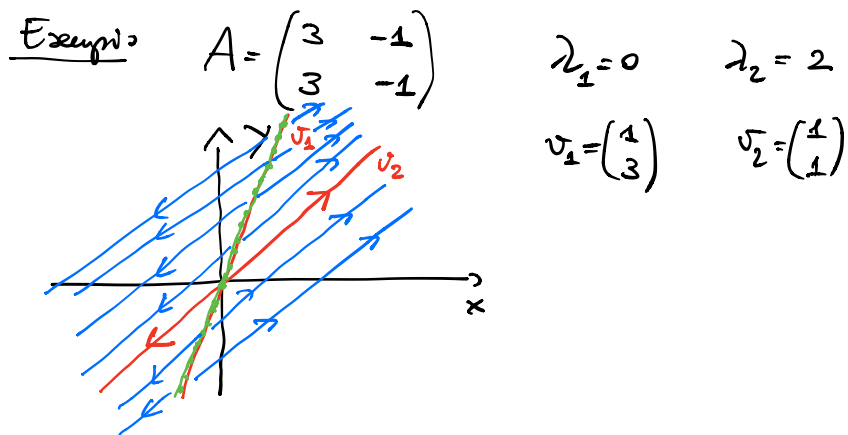
$$E^c(\emptyset) = \mathbb{R}^2 \quad E^u(\emptyset) = E^s(\emptyset) = \{\emptyset\}$$



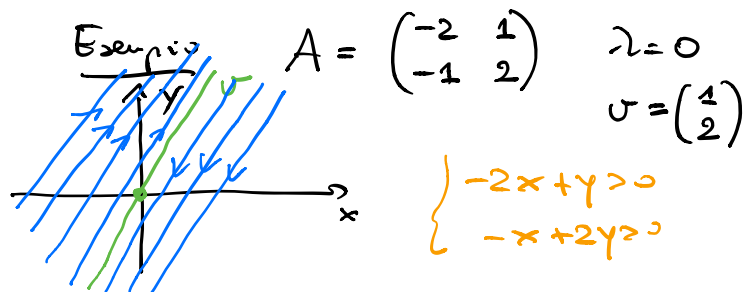
⑤ $\det A = 0 \quad p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - \text{tr} A)$

• $\text{tr} A \neq 0 \quad A$ ha autovalori $\{0, \text{tr} A\}$

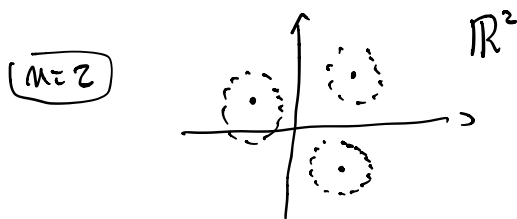
$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr} A \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} v_0 \\ v_2 \end{matrix} \leftrightarrow \text{PUNTI FISSI}$$



• $\text{tr} A = 0 \quad A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{opp.} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



$$\dot{x} = F(x) \quad , \quad F \in C^1, \quad x \in \mathbb{R}^m \quad \varphi(x, t) \text{ flusso}$$

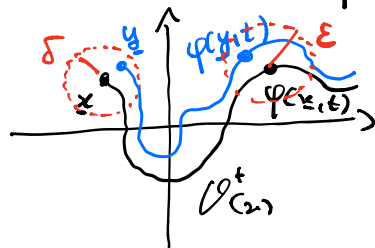


→ punti fissi, $F(x)=0$
periodiche
invarianti

Stabilità

Def. Un punto $x \in \mathbb{R}^m$ si dice STABILE NEL SENSO DI LYAPUNOV se $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall y \in \mathbb{R}^m$ per cui $d(x, y) < \delta$
si ha $d(\varphi(x, t), \varphi(y, t)) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$



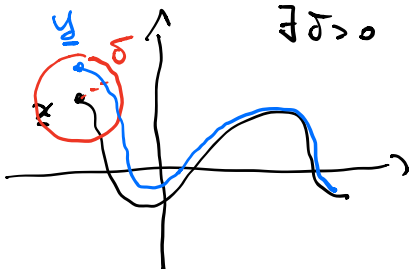
$$\omega^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi(x, t)$$

Def. Un punto $x \in \mathbb{R}^m$ si dice ASINTOTICAMENTE STABILE NEL SENSO DI LYAPUNOV se

x è stabile nel senso di Lyapunov.

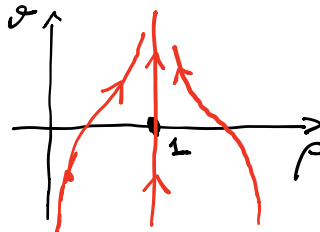
e inoltre

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall y \in B_\delta(x)$ si ha
 $d(\varphi(x, t), \varphi(y, t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$



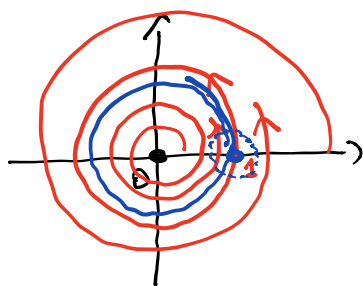
Esempio In coordinate polari sia

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) \\ \dot{\vartheta} = \rho^2 \end{cases}$$



$\{\rho=1\}$ è un insieme invariante

$$I(\rho, \vartheta) = \rho \quad \left. \frac{d}{dt} I \right|_{\rho=1} = \left. \dot{\rho} \right|_{\rho=1} = \left. \rho(1-\rho^2) \right|_{\rho=1} = 0$$



$\underline{x} = (1, 0)$ è stabile?

$\mathcal{O}(\underline{x}_0)$ è periodica di periodo 2π

$$\left. \dot{\vartheta} \right|_{\rho=1} = 1$$

$\underline{y} = (1+\delta, 0)$ $\mathcal{O}^+(\underline{y})$ interseca il semi-asse $x > 0$ dopo un tempo $> 2\pi$

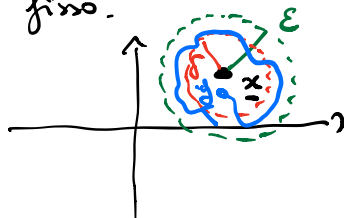
$$d(\varphi(\underline{x}_0, 2\pi), \varphi(\underline{x}+\delta, 0), 2\pi) > \delta$$

$$\varphi(\underline{x}_0, 2k\pi) \in \{(x, 0) \mid x > 0\}$$

$$\varphi(\underline{x}+\delta, 0, 2k\pi) \in \{(x, 0) \mid x < -1\}$$

Oss Le def. di sopra sono esatte al caso $\underline{x}$ punto fisso.

Stabilità



$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) < \delta$$



$$d(\underline{x}, \varphi(\underline{y}, t)) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Asintotica
stabilità

$\underline{x}$ è stabile e inoltre

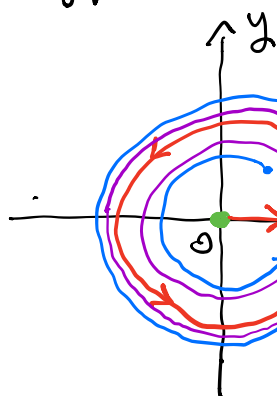
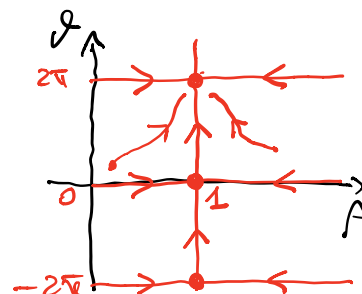
$\exists \delta > 0$ t.c. $\underline{y} \in B_\delta(\underline{x})$

$$\Rightarrow d(\underline{x}, \varphi(\underline{y}, t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\vartheta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\rho^2} \Big|_{\substack{x=\rho \cos \vartheta \\ y=\rho \sin \vartheta}} = 1 - \cos \vartheta \end{cases}$$



$(1,0)$ non è stabile

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$

$\exists \underline{y} \in B_\delta(\underline{x})$ t.c.

$d(\varphi(\underline{y}, t), \underline{x}) > \varepsilon$
per un certo t

$(1,0)$ è quasi-asintoticamente stabile

Def. Un insieme $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ si dice stabile orbitalmente

$\underline{x}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $d(\underline{y}, \Gamma) < \delta$ allora

$$d(\varphi(\underline{y}, t), \Gamma) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Stabilità lineare

$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n, F \in C^1, \underline{x}_0 \text{ punto fisso}$$

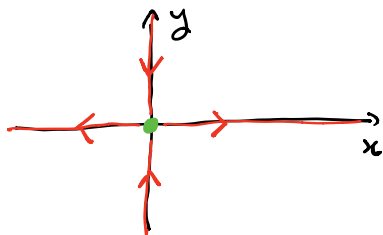
$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_0) + JF(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

$$\underline{y} = \underline{x} - \underline{x}_0 \Rightarrow \dot{\underline{y}} = JF(\underline{x}_0) \underline{y} + o(\|\underline{y}\|)$$

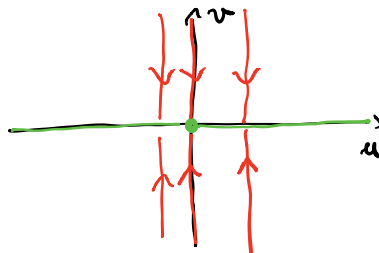
Per $\|\underline{y}\|$ chb. piccolo, il sistema è approssimato dal sistema lineare $\dot{\underline{y}} = JF(\underline{x}_0) \underline{y}$.

Esempio $\begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0) \quad JF(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \text{ è il linearizzato in } B_\varepsilon(0, 0).$$



$(0, 0)$ è instabile

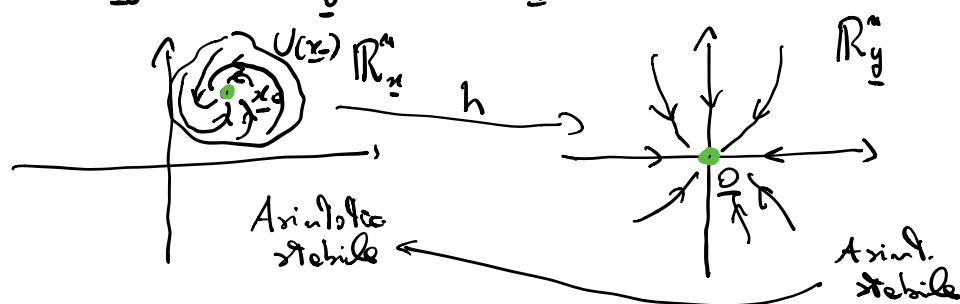


$(0, 0)$ è stabile

$$E^c(0, 0) = \{v = 0\}$$

Def. Un punto fisso $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice **IPERBOLICO** se $JF(\underline{x}_0)$ non ha autovalori con parte reale nulla.

TEOREMA (Hartman - Grobman) Sia $\dot{x} = F(x)$ in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1$, e sia x_0 un punto fisso. Se x_0 è iperbolico $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ e $h: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n_y$ omeomorfismo che manda orbite di $\dot{x} = F(x)$ in orbite del sistema $\dot{y} = JF(x_0)y$. In particolare la stabilità di x_0 corrisponde a quella di $y_0 = 0$ in $\dot{y} = JF(x_0)y$.

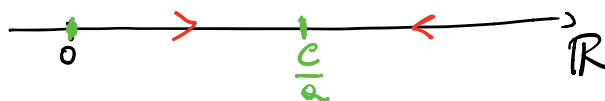


Oss In generale anche se $F \in C^\infty, C^\omega$, si può concludere l'omeomorfismo.

Esempio Sistemi di Lotka-Volterra

- Dinamica delle popolazioni in $\mathbb{R}$. Eq. diff. logistiche.

$$\dot{x} = x(c - ax) \quad , \quad a, c > 0 \quad , \quad x \geq 0$$

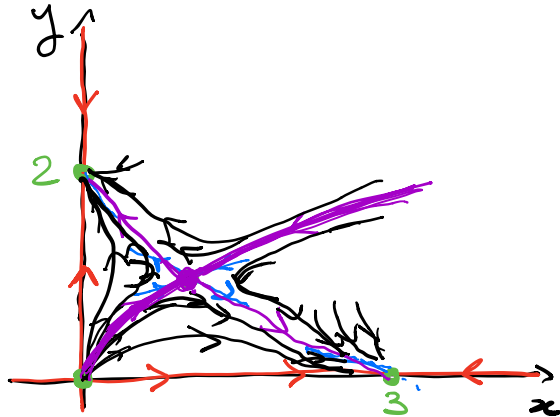


- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(c_1 - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(c_2 - a_2y - b_2x) \end{cases}$$

x consigli, y lepri in competizione

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3-x-2y) \\ \dot{y} = y(2-x-y) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$



Punti fissi =

$$= \begin{cases} x(3-x-2y) = 0 \\ y(2-x-y) = 0 \end{cases}$$

$$= \left\{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inotab.}}}{(0,0)}, \underbrace{(0,2), (3,0)}_{\substack{\downarrow \\ \text{crinotab} \\ \text{stabil.}}}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{inotab.}}}{(4,1)} \right\}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3-x-2y-x & -2x \\ -y & 2-x-y-y \end{pmatrix}$$

(0,0) $JF(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO DO
parabolas $\lambda_2 = 2$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ INSTABLE

$$(0, 2) \quad JF(0, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ NOVO}$$
$$\lambda_2 = -2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ STABILE}$$

iperbolico

(3,0) JF(3,0) = $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ NODD
 cyclic $\lambda_2 = -1$ $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ STABLE

(1,1) $JF(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{2}$ SELLA
 hiperbólico $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ $\underline{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}) \quad , \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad F(\underline{0}) = \underline{0} \quad \text{punto fisso } \underline{0}$$

$$(*) \quad F(\underline{x}) = F(\underline{0}) + JF(\underline{0}) \underline{x} + \sum_{|\mu| \geq r} v_\mu(\underline{x}) \quad , \quad r \geq 2$$

dove $v_\mu(\underline{x}) = \sum_{|\mu|=l} a_{\mu,l} x^\mu$ polinomi omogenei

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n \quad , \quad x^\mu := x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_n^{\mu_n}$$

$$|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

(**) $JF(\underline{0})$ ha n autovalori reali e diagonale
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Esiste un cambiamento di coordinate $\underline{y} = h(\underline{x})$

tale che $\dot{\underline{y}} = JF(\underline{0}) \underline{y}$?

cerchiamo $\underline{y} = \underline{x} + \tilde{h}(\underline{x}) \quad , \quad \tilde{h}_i(\underline{x}) = \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} x^\mu$ ||

t.c. $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O(|y|^{r+1}) \quad . \quad \forall i=1, \dots, n.$ ||

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \dot{x}_i + \frac{d}{dt} \tilde{h}_i(\underline{x}) = \dot{x}_i + \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \frac{x^\mu}{x_k} \dot{x}_k \right) = \\ &= \lambda_i x_i + (v_r(\underline{x}))_i + \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \frac{x^\mu}{x_k} (\lambda_k x_k + (v_r(\underline{x}))_k) \right) \\ &\quad + O(|x|^{r+1}) \end{aligned}$$

$$\left[\text{oss} \quad x_i = y_i - \tilde{h}_i(\underline{x}) = y_i - \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} y^\mu + O(|y|^{r+1}) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_i y_i - \sum_{|\mu|=r} \lambda_i \beta_{\mu,i} y^\mu + \sum_{|\mu|=r} a_{\mu,r,i} x^\mu + \\ &\quad + \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} \sum_{k=1}^n (\lambda_k \mu_k x^\mu) + O(|x|^{r+1}) = \end{aligned}$$

$$= \lambda_i y_i - \sum_{|\mu|=r} \lambda_i \beta_{\mu,i} y^\mu + \sum_{|\mu|=r} a_{\mu,r,i} y^\mu + \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_k \right) y^\mu + O(|y|^{r+1})$$

$$= \lambda_i y_i + \sum_{|\mu|=r} y^\mu \left(-\lambda_i \beta_{\mu,i} + a_{\mu,r,i} + \beta_{\mu,i} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_k \right) \right) + O(|y|^{r+1})$$

Se scegliamo $\tilde{h}_i(x) = \sum_{|\mu|=r} \beta_{\mu,i} x^\mu$ con

$$\boxed{\beta_{\mu,i} = \frac{a_{\mu,r,i}}{\lambda_i - \sum_{k=1}^m \mu_k \lambda_k}} \quad \forall i=1, \dots, m$$

e $\dot{y}_i = \lambda_i y_i + O(|y|^{r+1})$

Serve che $\lambda_i - \sum_{k=1}^m \mu_k \lambda_k \neq 0 \quad \forall i=1, \dots, m$
 $\forall \mu \in \mathbb{N}_0^m, |\mu|=r$

Def. Una m -upla $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ si dice
 RISONANTE se $\exists m = (m_1, \dots, m_m) \in \mathbb{N}_0^m$ t.c.
 per qualche $s \in \{1, \dots, m\}$ si ha $\lambda_s - \sum_{k=1}^m m_k \lambda_k = 0$
 Si chiama ORDINE DELLA RISONANZA il
 $|m| = \sum_{k=1}^m m_k$

(notazione $(m, \lambda) := \sum_{k=1}^m m_k \lambda_k$)

Def. $FF(0)$ è RISONANTE se gli autovalori formano
 una m -upla risonante

Teorema (Linearizzazione di Poincaré) Se $FF(0)$ è
 non risonante per ogni ordine, allora $\exists \underline{y} = h(\underline{x})$
 $r \geq 2$

formale t.c. $\dot{y} = JF(\underline{0}) y$.

OSS Sono quali ipotesi h è convergente in un intorno di $\underline{0}$?

$$h_i(x) = x_i + \sum_{l \geq r} \left(\sum_{|\mu|=l} \frac{a_{\mu, l, i}}{\lambda_i - (\mu, \lambda)} x^\mu \right) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Per le non risonanze, $\lambda_i - (\mu, \lambda) \neq 0 \quad \forall i, \forall \mu \in \mathbb{N}_0^m$
 $|\mu| = l, \quad \forall l \geq r.$

"Problema dei piccoli denominatori"

Def Una m -upla $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ soddisfa la
 CONDIZIONE DI SIEGEL se $\exists C > 0, \nu > 0$ t.c.

$$|\lambda_s - (\mu, \lambda)| \geq C |\mu|^{-\nu}$$

$$\forall s = 1, \dots, m \quad \forall \mu \in \mathbb{N}_0^m \text{ con } |\mu| \geq 2.$$

OSS Condizione per $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ di essere DIOPANTEO

$$\exists C > 0, \nu > 0 \text{ t.c. } \left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq C q^{-\nu-2}$$

Teorema (POINCARÉ - SIEGEL) Sia $\dot{x} = F(x)$ con

F analitica in $U(\underline{0})$, $F(\underline{0}) = \underline{0}$ e $JF(\underline{0})$ è

non risonante ad ogni ordine ≥ 2 . Allora e vale

per gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ di $JF(\underline{0})$ almeno una

delle tre condizioni, si ha che la transf. $\underline{y} = h(x)$

definita nel Teorema di linearizzazione è convergente
 in $\dot{U}(\underline{0}) \subset U(\underline{0})$.

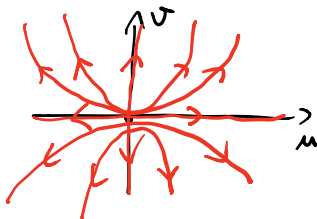
Le tre condizioni sono:

Poincaré $\left[\begin{array}{ll} \text{(i)} & \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \\ \text{(ii)} & \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0 \quad \forall i \end{array} \right.$

Siegel $[(\pm i)^2] \rightarrow$ soddisfa la condizione di Siegel.

Esempio $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y + x^2 \end{cases} \quad DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ iperbolico}$
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ resonanti

$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = 2v \end{cases} \xrightarrow{?} \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y + x^2 \end{cases}$



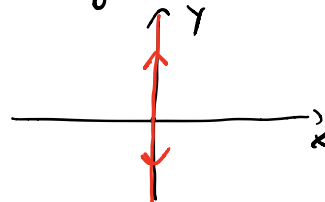
$v = k u^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + x^2}{x} = \frac{2y}{x} + x$

$W(x) = x^2 y \Rightarrow \frac{dW}{dx} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow W(x) = \log|x| + \text{cost} \quad (x \neq 0)$

$y(x) = x^2 (\log|x| + \text{cost})$
 non
 equiv.
 analiticamente



Stabilità per parti fini anche non iperbolic.

$\dot{x} = F(x), \quad x_0 \text{ punto fisso, in } \mathbb{R}^n$

Cerca $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.e. l'evoluzione delle orbite si possa descrivere tramite l'evoluz. dei valori di V .

OSS $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ scelto } x \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R} \ni t \mapsto V(\varphi(x, t))$

NOTAZIONE $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \in C^1$

$$\dot{V}(x) := \langle \nabla V(x), F(x) \rangle$$

$$= \left. \frac{d}{dt} V(\varphi(x, t)) \right|_{t=0}$$

Def. Dato x_0 punto fisso di $\dot{x} = F(x)$ in $\mathbb{R}^n$,
 si dice FUNZIONE DI LYAPUNOV DI x_0
 una $V: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- (i) $V(x) > V(x_0) \quad \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\};$
- (ii) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U(x_0).$

Se V soddisfa (i) e

$$(ii)' \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\};$$

allora V si chiama FUNZIONE DI LYAPUNOV
 STRETTA DI x_0 .

Teorema (primo di Lyapunov) Sia x_0 punto fisso di
 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se esiste una funz. di Lyap. di x_0 ,
 allora x_0 è stabile nel senso di Lyapunov.

Teorema (secondo di Lyapunov) Se invece esiste una
 funz. di Lyapunov stretta di x_0 , allora x_0 è
 asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov.

Prop. Se esiste una $V: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. valga (i) e
 (ii)-bis $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$
 allora x_0 è punto fisso instabile ($\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \delta \in B_\delta(x_0) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad d(\varphi(y, \varepsilon), x_0) > \varepsilon).$$

Esercizio
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y^2 \\ \dot{y} = -y - yx^3 \end{cases} \quad \text{Stabilità di } (0,0)?$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 2y \\ -3yx^2 & -1-x^3 \end{pmatrix} \quad JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ non è iperbolico (perché $JF(0,0)$ ha autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$)

(1) $(0,0)$ sia un punto di minimo isolato.

$$\exists U(0,0) \quad \text{t.c.} \quad V(x,y) > V(0,0) \quad \forall (x,y) \in U(0,0)$$

$$V(x,y) = Ax^{2m} + By^{2n}, \quad A, B > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\dot{V}(x,y) = \langle \nabla V(x,y), F(x,y) \rangle =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \cdot (-x^3 + y^2) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \cdot (-y - yx^3) =$$

$$= 2mA x^{2m-1}(-x^3 + y^2) + 2nB y^{2n-1}(-y - yx^3) =$$

$$= -2mA x^{2m+2} - 2nB y^{2n} +$$

$$+ 2mA x^{2m-1} y^2 - 2nB y^{2n} x^3 = 0$$

$$= -2mA x^{2m+2} - 2nB y^{2n} < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow V \text{ soddisfa (ii)}' \Rightarrow V \text{ funz. di Lyap stretta di } (0,0)$$

$$\Rightarrow (0,0) \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$\begin{cases} 2m-1=3 \\ 2=2m \\ 2mA=2nB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \\ 2A=B \end{cases}$$

$V(x,y) = x^4 + 2y^2$ è funz di Lyap. della di $(0,0)$.

Esempio $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu x + 2y)(z+1) \\ \dot{y} = (-x + \mu y)(z+1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases} \quad \text{Stabilità di } (0,0,0)?$$

$$JF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mu(z+1) & 2(z+1) & \mu x + 2y \\ -(z+1) & \mu(z+1) & -x + \mu y \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{pmatrix}$$

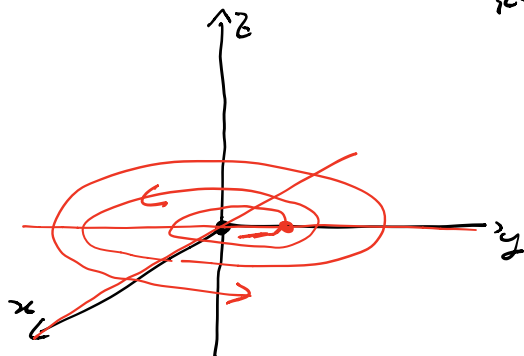
$$JF(0,0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 2 & 0 \\ -1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda(\lambda - \mu)^2 + 2 \\ &= \lambda(\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \mu \pm i\sqrt{2}$$

$(0,0,0)$ non è iperbolico

Osserviamo che $\{z=0\}$ è invariante.

$$I(z) = z \quad \frac{d}{dt} I = \dot{z} \Big|_{\{z=0\}} = -z^3 \Big|_{\{z=0\}} = 0$$



$$A_{\text{stop}}(0) = \text{Spec} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{stop}}(\lambda_{2,3}) = \text{Spec} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Se $\mu > 0 \Rightarrow (0, q_0)$ é instável
 $E^c(\underline{0})$, $E^u(\underline{0}) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Por $\mu \leq 0$?

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sia un punto fisso di $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Una funzione $V: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice FUNZIONE

DI LYAPUNOV di x_0 se $V \in C^1(U)$ e

$$(i) \quad V(x) > V(x_0) \quad \forall x \in U(x_0)$$

$$(ii) \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U(x_0)$$

$$[\dot{V}(x) := \langle \nabla V(x), F(x) \rangle]$$

Se invece di (ii) vale

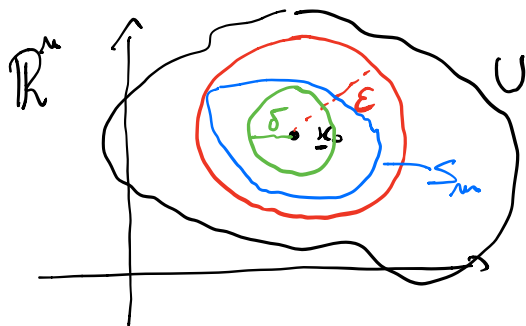
$$(ii)' \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$$

allora V si dice FUNZ. DI LYAPUNOV STRETTA

$$[\dot{V}(x_0) = \langle \nabla V(x_0), F(x_0) \rangle = 0]$$

TEOREMA (primo di Lyapunov) Se esiste una funzione di Lyapunov per il punto fisso x_0 , allora x_0 è stabile nel senso di Lyapunov.

dim x_0 è st. nel senso di Lyapunov $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
t.c. $d(x_0, y) < \delta$ implica $d(x_0, \varphi(y, t)) < \varepsilon$
 $\forall t \geq 0$



Fissiamo ε v.c.

$$B_\varepsilon(x_0) \subset U$$

$$m := \min_{\partial B_\varepsilon(x_0)} V \quad \text{e} \quad S_m := \{ y \in B_\varepsilon(x_0) : V(y) = m \}$$

Scelgo $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(\underline{x}_0) \subset S_m$.

Osserviamo che $\underline{x}_0 \in S_m \neq \emptyset$, $V(\underline{x}_0) < V(\underline{x}) \forall \underline{x} \in U$

Per qui $\underline{y} \in B_\delta(\underline{x}_0)$ voglio mostrare che $\varphi(\underline{y}, t) \in B_\delta(\underline{x}_0)$

$$\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \text{ implica } V(\varphi(\underline{y}, t)) \leq V(\underline{y}) \forall t \geq 0 \\ \forall \underline{x} \in U$$

$$t \mapsto V(\varphi(\underline{y}, t)) \text{ è non-crescente}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\varphi(\underline{y}, t)) &= \langle \nabla V(\varphi(\underline{y}, t)), \frac{d}{dt} \varphi(\underline{y}, t) \rangle = \\ &= \langle \nabla V(\varphi(\underline{y}, t)), F(\varphi(\underline{y}, t)) \rangle = \\ &= \dot{V}(\varphi(\underline{y}, t)) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \varphi(\underline{y}, t) \in U \end{aligned}$$

Allora $\varphi(\underline{y}, t) \in B_\delta(\underline{x}_0) \forall t \geq 0$. Infatti se

$\exists t_0 > 0$ t.c. $\varphi(\underline{y}, t_0) \notin B_\delta(\underline{x}_0)$, allora per

la cont. delle soluzioni $\exists t_1 \leq t_0$ t.c.

$\varphi(\underline{y}, t_1) \in \partial B_\delta(\underline{x}_0)$. Ma $V(\varphi(\underline{y}, t_1)) \leq V(\underline{y}) < m$

quindi ho una contraddizione ($V(\varphi(\underline{y}, t_1)) \geq m$). $\square$

TEOREMA (criterio di Lyapunov) Se V è funz. di Lyap.
stretta per $\underline{x}_0$, allora $\underline{x}_0$ è asintoticamente
stabile nel senso di Lyapunov.

dim $\underline{x}_0$ è asint. stabile $\Leftrightarrow \underline{x}_0$ è stabile e

$\exists \delta > 0$ t.c. $d(\underline{x}_0, \underline{y}) < \delta$ implica

$$d(\varphi(\underline{y}, t), \underline{x}_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Se V è funz. di Lyap. stretta, sappiamo che x_0 è stabile. Fissato $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $d(x_0, y) < \delta$ implica $d(\varphi(y, t), x_0) < \varepsilon \forall t \geq 0$.

Quindi $d(x_0, y) < \delta$ n.h. $\mathcal{O}^+(y) \subset B_\varepsilon(x_0)$, e quindi $\omega(y) \neq \emptyset$, compatto e invariante.

Prendiamo $y \in B_\delta(x_0)$, e $t \mapsto V(\varphi(y, t))$ per $t \geq 0$ è decrescente.

$$\left[\frac{d}{dt} V(\varphi(y, t)) = \dot{V}(\varphi(y, t)) < 0 \right]$$

$$\text{Quindi } \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(y, t)) =: c \in \mathbb{R}$$

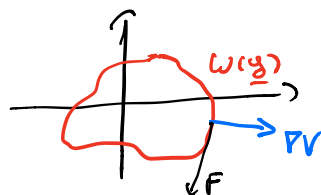
Studio V su $\omega(y)$.

Sia $z \in \omega(y)$, n.h. $\exists t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ t.c.

$$\varphi(t_k, y) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} z$$

$$V(z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} V(\varphi(t_k, y)) = c$$

$$\Rightarrow V|_{\omega(y)} \equiv c.$$



$$\dot{V}|_{\omega(y)} \equiv 0$$

$$\dot{V}(z) = \langle \nabla V(z), F(z) \rangle$$

Inoltre $\omega(y)$ è invariante e quindi $\varphi(z, t) \in \omega(y) \forall t \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto V(\varphi(t, z)) = c \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \omega(y)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} V(\varphi(t, z)) = \langle \nabla V(\varphi(t, z)), F(\varphi(t, z)) \rangle = \dot{V}(\varphi(t, z)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \dot{V}|_{\omega(y)} \equiv 0$$

Ma $\dot{V}(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in U(\underline{x}_0) \setminus \{\underline{x}_0\}$, allora
 $\omega(\underline{x}_0) = \{\underline{x}_0\}$. $\square$

TEOREMA (Principio di invarianza di La Salle).

Sia $\underline{x}_0$ punto fisso di $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e sia

V una funz. di Lyapunov definita in $U(\underline{x}_0)$.

Sia $\underline{y} \in U(\underline{x}_0) \neq \underline{x}_0$ c. $\mathcal{O}^+(\underline{y}) \subset U(\underline{x}_0)$. Allora

$\omega(\underline{y}) \subset \{\dot{V} \equiv 0\}$. In particolare $\omega(\underline{y})$ è contenuto in un insieme invariante di $\{\dot{V} \equiv 0\}$.



Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x} = (\mu x + 2y)(z+1) \\ \dot{y} = (-x + \mu y)(z+1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

Stab di $(0,0,0)$
 al variare di
 $\mu \in \mathbb{R}$?

$(0,0,0)$ non è iperbolico

$\mu > 0 \Rightarrow (0,0,0)$ è instabile

$\{z=0\}$ è invariante e $\begin{cases} \dot{x} = \mu x + 2y \\ \dot{y} = -x + \mu y \end{cases}$

$$V(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$$

$$\dot{V}(x,y,z) = 2x\dot{x} + 4y\dot{y} + 2z\dot{z} =$$

$$= 2x(\mu x + 2y)(z+1) + 4y(-x + \mu y)(z+1) - 2z^4$$

$$= 2(z+1)[\mu x^2 + 2xy - 2xy + 2\mu y^2] - 2z^4$$

$$= \underbrace{2(z+1)\mu(x^2 + 2y^2)}_{\leq 0 \text{ se } z+1 > 0} - \underbrace{2z^4}_{\leq 0}$$

$\mu < 0$

Se $V: \{z > -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\dot{V}(x,y,z) < 0 \quad \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$
 funz di Lyap. *stretta*

$\Rightarrow (0,0,0)$ è asintoticamente stabile

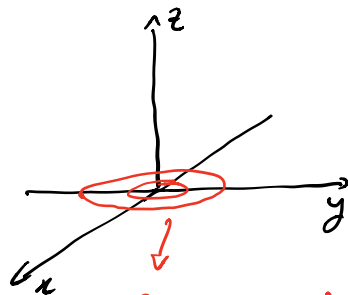
$$\mu=0 \quad \dot{V}(x,y,z) = -2z^4 \leq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

funz. di Lyap.

$\Rightarrow (0,0,0)$ è stabile

È asintoticamente stabile?

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z+1) \\ \dot{y} = -x(z+1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

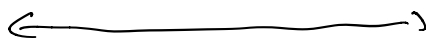


soluzioni in $\{z=0\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$\omega(x,y,0) = \varnothing(x,y,0)$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ non è asintoticamente stabile



Def. Sia x_0 un punto fisso asintoticamente stabile, si chiama

DOMINIO DI ASINTOTICA STABILITÀ DI x_0 l'insieme

$$D(x_0) := \{ y \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, y) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0 \}$$

Se $D(x_0) = \mathbb{R}^n$ allora x_0 si dice GLOBALMENTE

ASINTOTICAMENTE STABILE

Esempio $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 - \mu y^3 \end{cases}$ al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Punti fissi. Sol di $\begin{cases} y = 0 \\ x + x^3 + \mu y^3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (0,0).$$

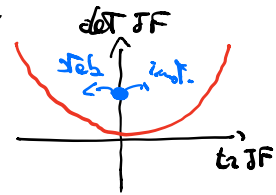
Iperbolico?

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-3x^2 & -3xy^2 \end{pmatrix} \quad JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\pm} = \pm i$$

$(0,0)$ non è iperbolico

$(0,0)$ è un centro lineare



$$\boxed{\mu=0}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= x\dot{x} + y\dot{y} = xy + y(-x-x^3) \\ &= -x^3y \end{aligned}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + ax^4$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= (x+4ax^3)\dot{x} + y\dot{y} = \\ &= xy + 4ax^3y - xy - x^3y = 0 \quad a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\bar{x}$ una funz. di Lyap. per $(0,0)$.

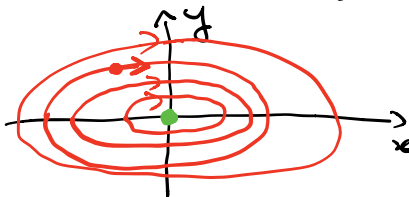
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{V}(x,y) &\equiv 0 \end{aligned}$$

In particolare, gli insiemi di livello di $V(x,y)$ sono insiemi invarianti.

$t \mapsto V(\varphi(t, x_0, y_0))$ è costante.

Fissato $c \geq 0$, $\{V(x,y) = c\} \neq \emptyset$. $V(0,0) = 0$



$$y = \pm \sqrt{2c - x^2 - \frac{1}{2}x^4}$$

$(0,0)$ è stabile ma non asintoticamente stabile
oss Questo è facile trovare V t.c. $\dot{V} \equiv 0$?
 Sistemi conservativi

$$\boxed{\mu > 0} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 - \mu y^3 \end{cases}$$

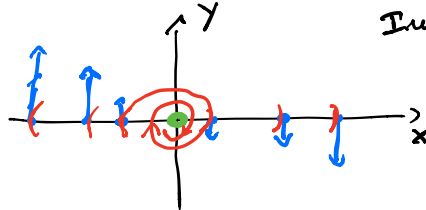
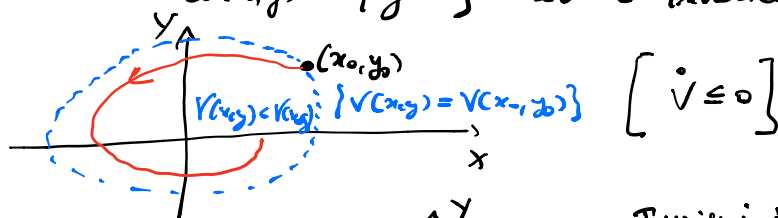
$$V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \quad V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{V}(x,y) = -\mu y^4 \leq 0 \quad \text{è funz. di Lyap. per } (0,0)$$

$\Rightarrow (0,0)$ è stabile

È asintoticamente stabile? V è funz. di Lyap. su $\mathbb{R}^2$
 e $\{\dot{V} = 0\} = \{y = 0\}$

Se $(x,y) \in \text{t.c.}$ $\mathcal{O}^+(x,y)$ è limitata, allora
 $\omega(x,y) \subset \{y=0\}$ ed è invariante.



Insieme invariante $\subset \{y=0\}$?
 $= \{(0,0)\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 - \mu y^3 \end{cases}$$

Quindi $\omega(x,y) = \{(0,0)\} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (0,0)$ è globalmente asintoticamente stabile

$$\boxed{\mu < 0} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - x^3 - \mu y^3 \end{cases}$$

$$\dot{V}(x,y) = -\mu y^4 \geq 0 \quad . \quad (0,0) \text{ é instável}$$

1. Dimostrazione di Hartman-Grobman per "pozzi"

Def. $\dot{x} = F(x)$, x_0 punto fisso di $\dot{x} = F(x)$ si dice "pozzo" se $JF(x_0)$ ha autovalori $\{\lambda_i\}_1^m$ con $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i=1, \dots, m$

Teorema ("versione" di Hartman-Grobman per pozzi)

Se x_0 è un pozzo di $\dot{x} = F(x)$ allora è
asintoticamente stabile nel senso di Lyapunov.

dim Riusciamo a costruire una funz. di Lyapunov

$V: B_0(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente.

Con $JF(x_0)$ ha autovalori in $\mathbb{R}$ con molteplicità n

$$JF(x_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(vedere "continuing").

$\dot{x} = F(x)$ è linearizzato in x_0 dunque

$$\dot{x} = \underbrace{F(x_0)}_{=0} + JF(x_0)(x - x_0) + \ell(x)$$

$$\forall c. \quad \ell(x_0) = 0, \quad J\ell(x_0) = 0 \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

Possiamo supporre $x_0 = 0$, $JF(x_0)$ in forma di Jordan.

Quindi, nel caso che predichiamo,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} x + \ell(x)$$

$$\text{Sia } y = (y_1, \dots, y_n) \quad \forall c. \quad y_{i+s} = e^{-s} x_{i+s} \quad \forall s=0, \dots, n-1$$

con $\varepsilon > 0$ fissato. Quindi:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{1+s} &= \varepsilon^{-s} \dot{x}_{1+s} = \varepsilon^{-s} (\lambda x_{1+s} + x_{2+s} + \dots + x_{m-2+s} + Q(x)_{1+s}) \\ &= \lambda y_{1+s} + \varepsilon y_{2+s} + (\tilde{Q}(y))_{1+s}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \underline{y} + \tilde{Q}(\underline{y}) \quad , \quad \lambda < 0$$

$$\tilde{Q}(\underline{0}) = 0 \quad \text{e} \quad F\tilde{Q}(\underline{0}) = 0$$

$$V(\underline{y}) = \sum_{i=1}^m y_i^2 \quad \text{è funz. di Lyapunov relativa per } \underline{y}_0 = \underline{0}.$$

$$(i) \quad V(\underline{y}) > V(\underline{0}) \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^m.$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad \dot{V}(\underline{y}) &= 2 \sum_{i=1}^m y_i \dot{y}_i = 2 \sum_{s=0}^{m-1} y_{1+s} \dot{y}_{1+s} \\ &= 2 \sum_{s=0}^{m-2} y_{1+s} (\lambda y_{1+s} + \varepsilon y_{2+s}) + 2\lambda y_m^2 + O(|y|^3) \\ &= 2\lambda \sum_{s=0}^{m-2} y_{1+s}^2 + \varepsilon (2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + \dots + 2y_{m-1} y_m) + O(|y|^3) \\ &\quad \varepsilon \left[\sum_{s=0}^{m-2} (y_{1+s} + y_{2+s})^2 - \sum_{s=0}^{m-2} (y_{1+s}^2 + y_{2+s}^2) \right] \\ &= (2\lambda - \varepsilon)(y_1^2 + y_m^2) + (2\lambda - 2\varepsilon) \sum_{s=1}^{m-2} y_{1+s}^2 + \varepsilon \sum_{s=0}^{m-2} (y_{1+s} + y_{2+s})^2 + O(|y|^3) \\ &\quad \leq 2\varepsilon \sum_{s=0}^{m-2} (y_{1+s}^2 + y_{2+s}^2) \\ &\leq 2(\lambda + 2\varepsilon) \sum_{s=0}^{m-2} y_{1+s}^2 + O(|y|^3)\end{aligned}$$

Scelgo ε t.c. $\lambda + 2\varepsilon < 0$ e mi chiedo se $\exists \delta > 0$ t.c.

$$(\dot{V} < 0 \quad \forall \underline{y} \in B_{\tilde{\sigma}}(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}.)$$

$$2(\lambda + 2\varepsilon) \sum_{j=1}^{n-1} y_{j+1}^2 + O(|\underline{y}|^3) < 0 \quad \forall \underline{y} \in B_{\tilde{\sigma}}(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}.$$

$$\text{Esiste } k \in \mathbb{R} \text{ e } \tilde{\sigma} > 0 \text{ t.c. } O(|\underline{y}|^3) < k |\underline{y}|^3 \text{ in } B_{\tilde{\sigma}}(\underline{0})$$

$$\dot{V} < 2(\lambda + 2\varepsilon) |\underline{y}|^2 + k |\underline{y}|^3 \quad \forall \underline{y} \in B_{\tilde{\sigma}}(\underline{0})$$

$$\text{Se } \tilde{\sigma} = \min \left\{ \frac{2|\lambda + 2\varepsilon|}{k}, \tilde{\sigma} \right\} \text{ si ha}$$

$$2(\lambda + 2\varepsilon) |\underline{y}|^2 + k |\underline{y}|^3 = |\underline{y}|^2 (2(\lambda + 2\varepsilon) + k |\underline{y}|) < 0$$

$$\Leftrightarrow |\underline{y}| < \frac{2|\lambda + 2\varepsilon|}{k} \quad \forall \underline{y} \in B_{\tilde{\sigma}}(\underline{0}). \quad \square$$

2. Funzioni limitate.

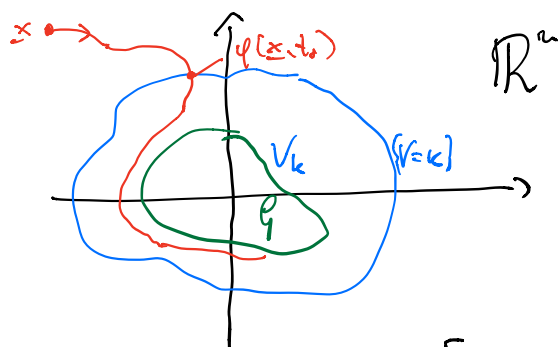
Teorema Supponiamo $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e che esista $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$V \in C^1$ e Q compatto in $\mathbb{R}^n$ t.c.

$$(a) \quad Q \subset V_k := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : V(\underline{x}) < k \}$$

$$(b) \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \dot{V}(\underline{x}) < -\delta \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus Q.$$

Allora per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists t_0 > 0$ t.c. $\varphi(\underline{x}, t) \in V_k$
 $\forall t \geq t_0.$



dim Se $\underline{x} \in V_k$, allora
 la tesi è dimostrata
 poiché $\dot{V}|_{\partial V_k} \leq -\delta < 0$.

$$[t \mapsto V(\varphi(\underline{x}, t)) \text{ è non-crescente}]$$

Se $\underline{x} \notin V_k$, basta mostrare che $\exists t_0 > 0$ t.c. $\varphi(\underline{x}, t_0) \in V_k$.

Supponiamo per assurdo che $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}^n \setminus V_k \forall t \geq 0$,

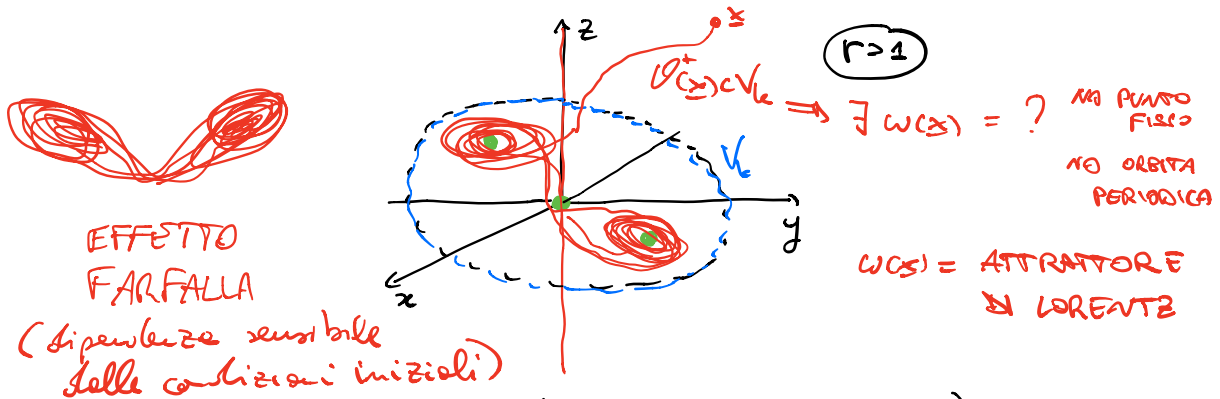
$$\begin{aligned} \text{allora } V(\varphi(x, t)) - V(x) &= \int_0^t \frac{d}{ds} (V(\varphi(x, s))) ds = \\ &= \int_0^t \dot{V}(\varphi(x, s)) ds < \int_0^t (-\delta) ds = -\delta t \end{aligned}$$

Ma allora se $t > \frac{V(x) - k}{\delta}$ allora

$$V(\varphi(x, t)) < k \Rightarrow \varphi(x, t) \in V_k \text{ (assurdo)} \quad \square$$

Esempio (Equazioni di Lorenz) (vedi Laylak)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \quad \sigma, r, b \in \mathbb{R}^+$$



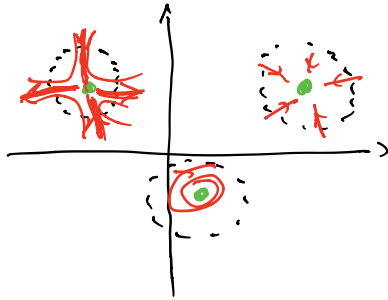
$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} (rx^2 + \sigma y^2 + \sigma (z - zr)^2) \text{ verifica}$$

le ipotesi del Teorema con

$$Q = \{ rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 < 2br^2 \}$$

$$\dot{V}|_Q \leq -\delta < 0.$$

←—————→



Curve invarianti

1. Sistemi conservativi. (sistemi meccanici a un grado di libertà)

In $\mathbb{R}^{2n}$ $\left[(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \right]$ un sistema di

ODE si dice hamiltoniano se $\exists H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$
di classe C^2 t.c.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad \forall i=1, \dots, n$$

In questo caso, si ha $\dot{H}(x, y) \equiv 0$ (integrale primo)

In particolare che $\{H(x, y) = c\}$ sono curve invarianti

(dim $\{H(x, y) = c\}$ è invariante se

$$\frac{d}{dt} H(\varphi(x, t)) \Big|_{\{H=c\}} = 0 \iff \dot{H}(x, y) \Big|_{\{H=c\}} = 0$$

$$\dot{H}(x, y) = \langle \nabla H(x, y), F(x, y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial y_i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Sistemi meccanici a un grado di libertà

$x \in \mathbb{R}$ coordinate generalizzate

$(x, \dot{x})$ descrive lo stato del sistema

$$E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(x, \dot{x}) = \underbrace{T(x, \dot{x})}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

caso
duplice

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

ODE

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

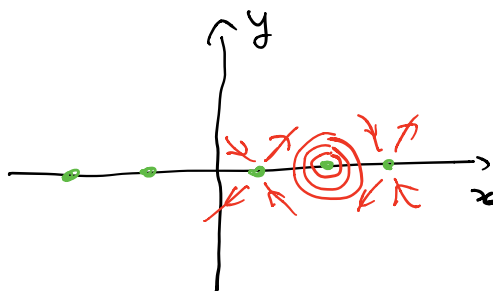
Definiamo $y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$ momento generalizzato [$y = m\dot{x}$]

$$\rightarrow H(x, y) = \frac{1}{2m} y^2 + V(x) \quad H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H \in C^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{y}{m} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'(x) \end{cases}$$

$\{H(x, y) = c\}$ sono insiemi
invarianti

$$y = \pm \sqrt{2m(c - V(x))}$$
$$c \geq V(x)$$

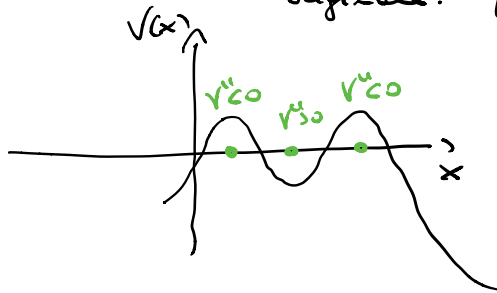


Punti fissi = $\{(x_0, 0) \mid c.c. V'(x_0) = 0\}$
 corrisp. ai punti critici dell'en-
gia potenziale $V(x)$

$$DF(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -V''(x_0) & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{V''(x_0)}{m}}$$

- $V''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, 0)$ è SELLA (iperbolico)
- $V''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, 0)$ è CENTRO LINEARE
(consideriamo solo punti critici non degeneri)

ma $(x_0, 0)$ è CENTRO anche nel sistema
originale. [H ha un minimo locale
in $(x_0, 0)$]



Def. Data un'eq. diff $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, si dice

INTEGRALE PRIMO una funzione

$$I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \dot{I}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\dot{I}(x) := \langle \nabla I(x), F(x) \rangle)$$

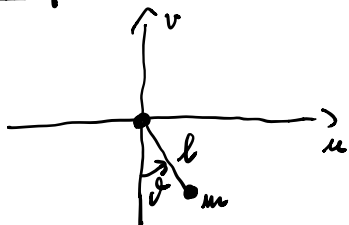
Quindi $\forall c \in \text{Imm } I$, l'insieme $\{I(x) = c\}$ è invariante.

Se $n=2$, esiste $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in C^2$, t.c.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}, \text{ allora } H \text{ è un integrale primo.}$$

$$H(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2m} y^2}_{\text{en. cin.}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

Esempio Moto del pendolo di massa m e lunghezza l .



$$\text{En. cinetica} \quad \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$$

$$\text{En. potenziale} \quad m g v$$

$$u = l \sin \vartheta, \quad v = -l \cos \vartheta$$

$$\dot{u} = l \dot{\vartheta} \cos \vartheta, \quad \dot{v} = l \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

$$E(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \text{en. cinetica} + \text{en. potenziale} =$$

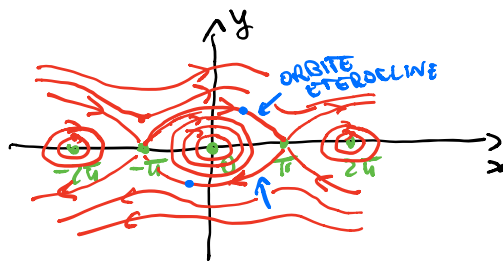
$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 - m g l \cos \vartheta$$

$$x = \vartheta, \quad y = \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} \left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 \right) = m l^2 \dot{\vartheta} \quad \text{momento generalizzato}$$

$$H(x, y) = E(\vartheta, \dot{\vartheta}) \Big|_{\substack{\vartheta=x \\ \dot{\vartheta}=\frac{y}{ml^2}}} = \frac{1}{2ml^2} y^2 - mgl \cos x$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{ml^2} y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mgl \sin x = -V'(x) \end{cases} \quad \dot{H} = 0 \quad \forall (x, y)$$

$$\text{Punti fissi} = \{ (k\pi, 0) \}_{k \in \mathbb{Z}}$$



$$JF(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -V''(k\pi) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -V''(k\pi) &= -mgl \cos(k\pi) \\ &= -mgl (-1)^k \end{aligned}$$

$$V''(k\pi) > 0 \Leftrightarrow k\pi \text{ \u00e9 un punto di minimo locale di } V$$

$$\Leftrightarrow (k\pi, 0) \text{ \u00e9 un CENTRO LINEARE}$$

$$V''(k\pi) < 0 \Leftrightarrow k\pi \text{ \u00e9 un punto di massimo locale di } V$$

$$\Leftrightarrow (k\pi, 0) \text{ \u00e9 una SELLA}$$

$$\boxed{k=0} \quad (0,0) \text{ \u00e9 un CENTRO LINEARE}$$

$$H(0,0) = \frac{1}{2ml^2} y^2 - mgl \cos x \Big|_{(0,0)} = -mgl \text{ \u00e9 un minimo locale}$$

Se $c = -mgl + \varepsilon$, $\{H=c\} \cap B_\delta(q_0)$ \u00e9 un insieme limitato, "simile" a una circonferenza.

$$\boxed{k=\pm 1} \quad (k\pi, 0) \text{ \u00e9 una SELLA}$$

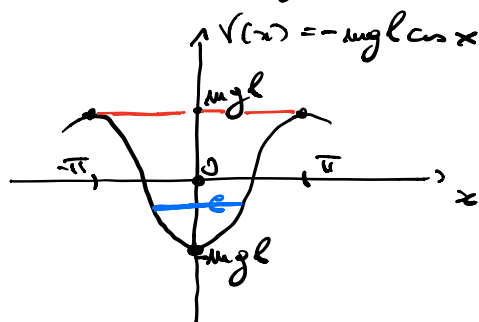
$$H(k\pi, 0) = -mgl \cos(k\pi) = mgl$$

$$(\pm\pi, 0) \in \{H = mgl\} =$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{2mgl^2(mgl + mgl \cos x)}\}$$

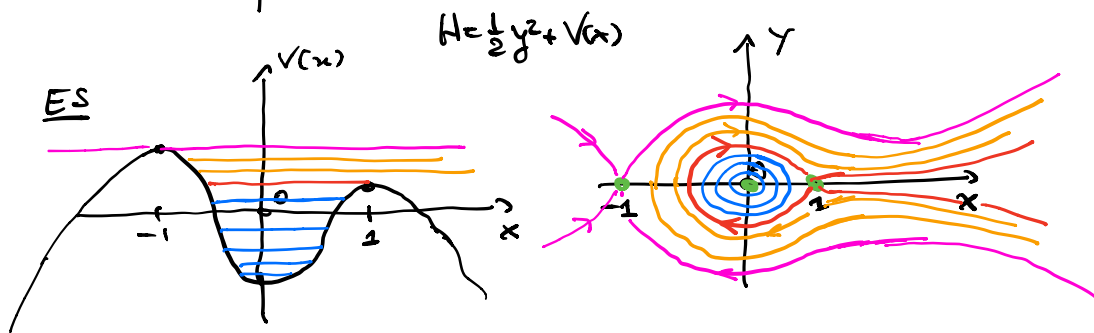
Def. Un punto z ha ORBITA ETEROCLINA
se $\omega(z) = \{P\}$ e $\alpha(z) = \{Q\}$ con
 P, Q punti fissi, $P \neq Q$

Fissato $c > mgl$, $\{H = c\}$ descrive i moti rotatori.



$$-mgl < c < mgl$$

$$c = mgl$$



Def. Un punto z ha ORBITA OMOCLINA
se $\alpha(z) = \omega(z) = \{P\}$ con P punto fisso.

Aggiungiamo al moto di un pendolo l'attrito $-\mu \dot{y}$
 $\mu > 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{ml^2} y \\ \dot{y} = -mgl \sin x - \frac{\mu}{ml^2} y \end{cases}$$

$$H(x, y) = \frac{1}{2ml^2} y^2 - mgl \cos x$$

$$\bullet H(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad H(x, y) > H(0, 0) \quad \forall (x, y) \in U(0, 0)$$

$$\bullet \dot{H}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -\frac{\mu}{ml^2} y^2 \leq 0$$

$\Rightarrow H$ è una funz. di Lyap. per $(0, 0)$

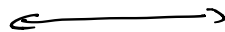
Principio di invarianza di La Salle $\Rightarrow \omega(x, y) \subset \{H=0\}$

$\Rightarrow \omega(x, y)$ è un insieme invariante in $\{y=0\}$

$$\Rightarrow U(0, 0) = \{x^2 + y^2 < \pi^2\} \quad \{H=0\} \cap U(0, 0) \text{ ha}$$

un unico insieme invariante che è $\{(0, 0)\}$

Allora $(0, 0)$ è asintoticamente stabile.



ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \mu y \end{cases}, \quad \mu \geq 0$$

$$\mu = 0 \Rightarrow H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \text{ è hamiltoniana}$$

$$\text{Punti fissi} = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0)\} \quad \forall \mu \geq 0.$$

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + \mu\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} \quad \begin{cases} -\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} > 0 \\ -\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4}}{2} < 0 \end{cases}$$

SELLA (IPERBOLICO)

$$JF(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\mu \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + \mu\lambda + 2 = 0$$

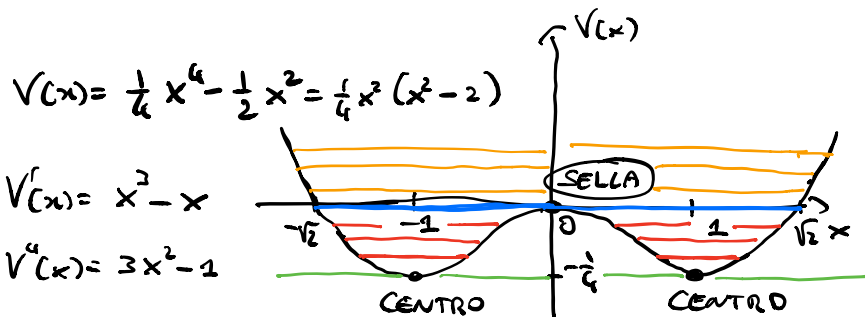
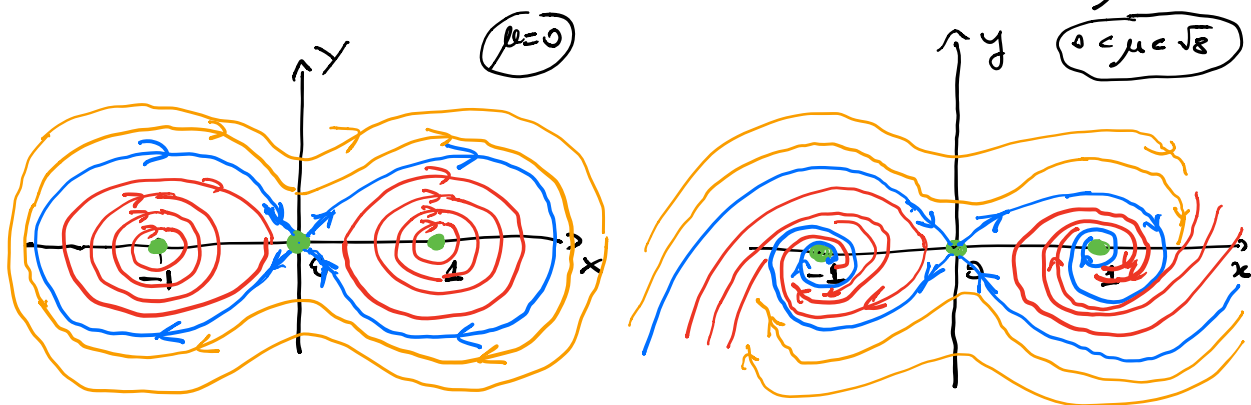
$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8}}{2}$$

$$\mu^2 - 8 \geq 0 \quad \lambda_{\pm} < 0 \quad \text{NODI STABILI } (\mu^2 = 8)$$

$$\mu^2 - 8 < 0 \quad \lambda_{\pm} = -\frac{\mu}{2} \pm i \frac{\sqrt{8 - \mu^2}}{2} \quad \operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -\frac{\mu}{2} \leq 0$$

FUOCHI STABILI $\mu > 0$

CENTRI $\mu = 0$



DSS $(1,0) \quad V(x,y) = Ay^{2m} + B(x-1)^{2m}$

$$\mu=0 \quad \begin{cases} \dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = x - x^3 = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

$$H(x, y) = \int y \, dy - \int (x - x^3) \, dx$$



Invarianti

Possiamo trovare un insieme invariante se è l'insieme di livello di $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in C^1$.

$$\{I(x)=c\} \text{ è invariante} \Leftrightarrow \dot{I}(x) \Big|_{x \in \{I=c\}} = 0$$

oss se I è integrale primo, è vero $\forall c \in \text{Im} I$.

$$\underline{\text{ES}} \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = (x-2)y \end{cases} \quad (\text{oss non è hamiltoniano})$$

• Altri sono invarianti? (i) $I(x, y) = x$ e mi chiedo

se $\{I(x, y)=0\} = \{x=0\}$ è invariante.

$$\Leftrightarrow \dot{I}(x, y) \Big|_{x=0} = \frac{\partial I}{\partial x} \cdot \dot{x} \Big|_{x=0} = x^2 - y - 1 \Big|_{x=0} \neq 0$$

$$(ii) \quad I(x, y) = y$$

$$\dot{I}(x, y) \Big|_{y=0} = \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} \Big|_{y=0} = (x-2)y \Big|_{y=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{y=0\} \text{ è invariante}$$

• Rette invarianti $y = ax + b$

$$I(x,y) = y - ax - b$$

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \dot{I}(x,y) \Big|_{y=ax+b} = 0 \quad ?$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(x,y) \Big|_{y=ax+b} &= \frac{\partial I}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \dot{y} \Big|_{y=ax+b} = -a\dot{x} + \dot{y} \Big|_{y=ax+b} = \\ &= -a(x^2 - y - 1) + (x-2)y \Big|_{y=ax+b} = \end{aligned}$$

$$= -a(x^2 - ax - b - 1) + (x-2)(ax+b) =$$

$$= a^2x + ab + a + bx - 2ax - 2b =$$

$$= x(a^2 + b - 2a) + ab + a - 2b = 0$$

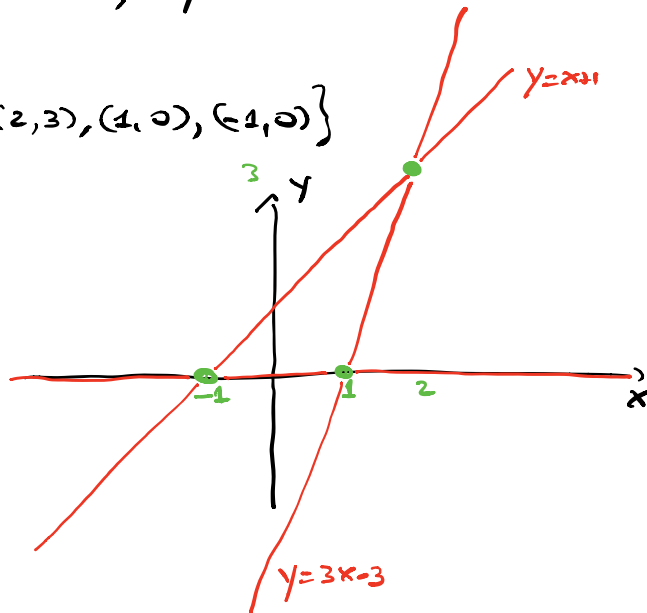
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b - 2a = 0 \\ ab + a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) \in \{(1,1), (3,-3)\}$$

Sono invarianti le rette

$$y=0, \quad y=x+1, \quad y=3x-3$$

$$\text{Punti fissi} = \{(2,3), (1,0), (-1,0)\}$$

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ (x-2)y = 0 \end{cases}$$



Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 1 \\ \dot{y} = (x-2)y \end{cases}$$

Sono invarianti $\{y=0\}$, $\{y=x+1\}$, $\{y=3x-3\}$

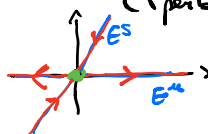
Punti fissi = $\{(-1,0), (1,0), (2,3)\}$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ y & x-2 \end{pmatrix}$$

$$JF(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{NODO STABILE} \\ \text{(iperbolico e asintoticamente stabile)}$$

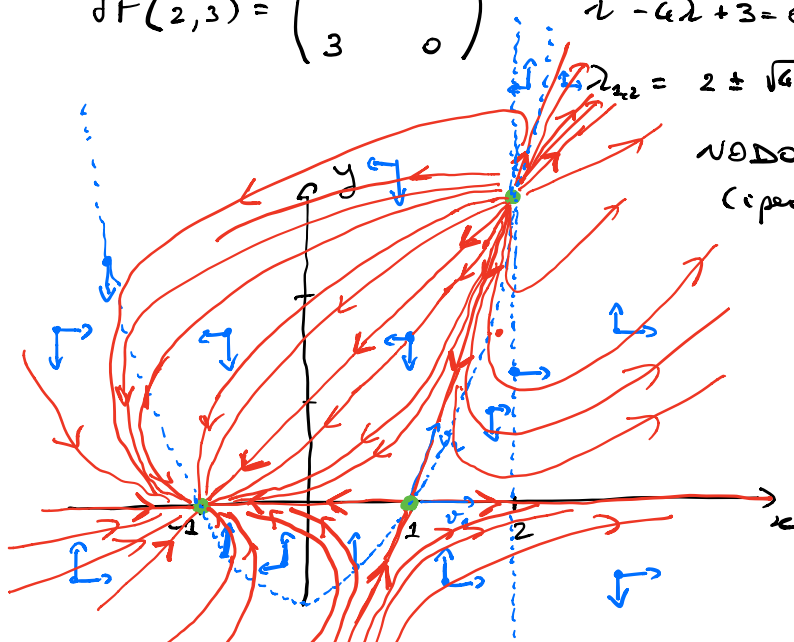
$$JF(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{SELLA} \\ \text{(iperbolico e instabile)}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$JF(2,3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NODO INSTABILE
(iperbolico e instabile)



$$\dot{x} > 0 \Leftrightarrow x^2 - y - 1 > 0$$

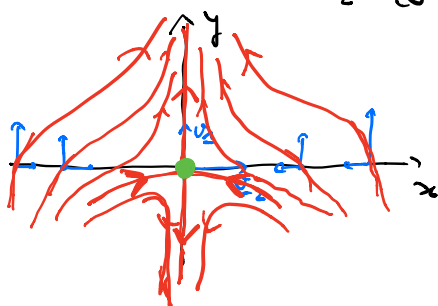
$$\dot{y} > 0 \Leftrightarrow (x-2)y > 0$$

Esempio $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\{I(x)=c\}$ è invariante

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - x^3 \\ \dot{y} = x^2 + y \end{cases} \quad \text{Punti fissi} = \{(0,0)\}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{SELLA}} \quad (\text{iperbolico})$$

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\{x=0\}$ è invariante

$\{y=0\}$ non è invariante

$$F(x,0) = (-2x - x^3, x^2)$$

$\exists$ insieme invariante "vicino" a $\{y=0\}$?

$$I(x,y) = y - h(x) = y - \sum_{i \geq 1} h_i x^i, \quad I(0,0) = 0$$

$$0 = \dot{I} \Big|_{\{I=0\}} = \langle \nabla I(x,y), F(x,y) \rangle \Big|_{\{I=0\}} = (x^2 + y) + (-h'(x))(-2x - x^3) \Big|_{y=h(x)}$$

$$= x^2 + h(x) + (2x + x^3)h'(x) =$$

$$= x^2 + \sum_{i \geq 1} h_i x^i + (2x + x^3) \left(\sum_{i \geq 1} i h_i x^{i-1} \right)$$

$$= x (h_1 + 2 h_1) + x^2 (1 + h_2 + 2 \cdot 2 h_2) +$$

$$+ x^3 (h_3 + 2 \cdot 3 h_3 + h_1) + x^4 (h_4 + 2 \cdot 4 h_4 + 2 h_2)$$

$$+ x^5 (h_5 + 2 \cdot 5 h_5 + 3 h_3) + \dots$$

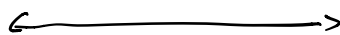
$$\int_{n \geq 3} h_n + 2n h_n + (n-2) h_{n-2} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3h_1 = 0, \quad 5h_2 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$h_n = 0 \quad \forall n \text{ dispari}, \quad h_2 = -\frac{1}{5}, \quad h_4 = \dots$$

$$\exists h(x) = \sum_{i \geq 1} h_{2i} x^{2i} \quad \text{t.c.} \quad \{y - h(x) = 0\} \text{ sia invariante}$$

$$h'(0) = 0$$



VARIETÀ STABILE E INSTABILE

Def Sia $\underline{x}_0$ un punto fisso di $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con flusso $\phi(t, x)$, e sia $U(\underline{x}_0)$ un intorno di $\underline{x}_0$. Si dice

• VARIETÀ STABILE LOCALE DI $\underline{x}_0$ IN U l'insieme

$$W_{loc}^s(\underline{x}_0) := \left\{ \underline{x} \in U : \phi(t, \underline{x}) \in U \quad \forall t \geq 0, \quad \phi(t, \underline{x}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \underline{x}_0 \right\}$$

• VARIETÀ INSTABILE LOCALE DI $\underline{x}_0$ IN U l'insieme

$$W_{loc}^u(\underline{x}_0) := \left\{ \underline{x} \in U : \phi(t, \underline{x}) \in U \quad \forall t \leq 0, \quad \phi(t, \underline{x}) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \underline{x}_0 \right\}$$

TEOREMA (della varietà stabile e instabile). Sia $\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$

in $\mathbb{R}^n$ con $F \in C^k$, $k \geq 1$, e flusso $\phi(t, \underline{x})$. Sia

$\underline{x}_0$ punto fisso iperbolico, e siano $E^s(\underline{0})$ ed $E^u(\underline{0})$

gli autospazi stabile e instabile di $\underline{y} = DF(\underline{x}_0)\underline{y}$.

($E^c = \{\underline{0}\}$). Allora esistono un intorno $B_\varepsilon(\underline{x}_0)$ e

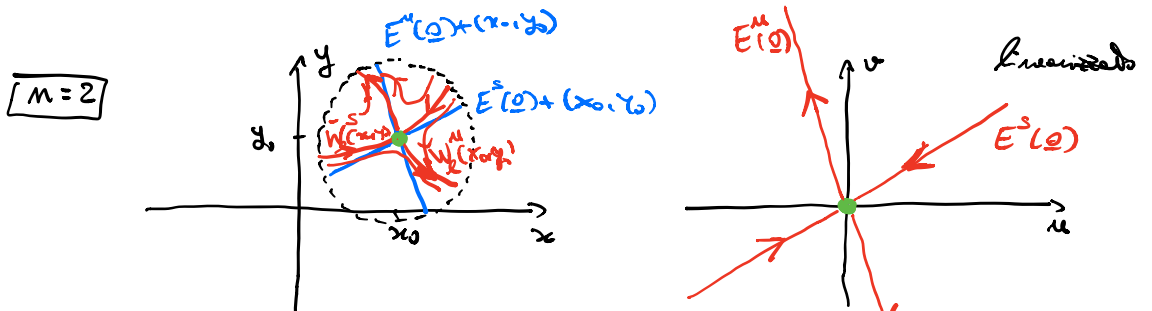
$W_{loc}^{s,u}(\underline{x}_0)$ in $B_\varepsilon(\underline{x}_0)$ con le seguenti proprietà:

(i) sono uniche;

(ii) W_{loc}^s è positivamente invariante, W_{loc}^u è negativamente invariante;

(iii) $W_{loc}^{s,u}$ sono varietà di classe C^k con
 $\dim W_{loc}^s(x_0) = \dim E^s(\underline{0})$, $\dim W_{loc}^u(x_0) = \dim E^u(\underline{0})$

(iv) $W_{loc}^s(x_0)$ è tangente in x_0 a $E^s(\underline{0}) + x_0$;
 $W_{loc}^u(x_0)$ " " " a $E^u(\underline{0}) + x_0$.



$W_{loc}^s(x_0, y_0)$ è grafico di
 una funzione di classe C^k
 $[y = h^s(x) \text{ v.c. } h^s(x_0) = y_0]$
 e il vettore tangente al
 grafico in (x_0, y_0) è autovettore
 di $JF(x_0, y_0)$ con autovalore $\lambda < 0$

$$\dim E^s(\underline{0}) = \dim E^u(\underline{0}) = 1$$

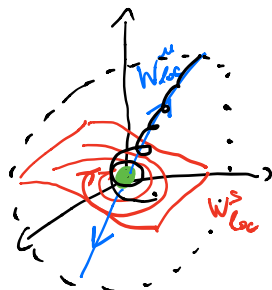
OSS se $m=2$, $\dim E^s(\underline{0}) + \dim E^u(\underline{0}) = 2$

	1	1	SELLE
$W_{loc}^s(x_0, y_0) = B_E(x_0, y_0) \leftarrow$	2	0	FUOCO NODO STABILE
$W_{loc}^u(x_0, y_0) = B_E(x_0, y_0) \leftarrow$	0	2	NODO INSTABILE FUOCO

Se $m=3$, $\dim E^s(\underline{0}) + \dim E^u(\underline{0}) = 3$

3	0
0	3

$$\dim W_{loc}^s = 2 \quad \dim W_{loc}^u = 1 \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$



Def. Dato un punto fisso x_0 iperbolico, e siano $W_{loc}^s(x_0)$ e $W_{loc}^u(x_0)$ le varietà locali stabile e instabile, si chiama

• VARIETÀ STABILE GLOBALE

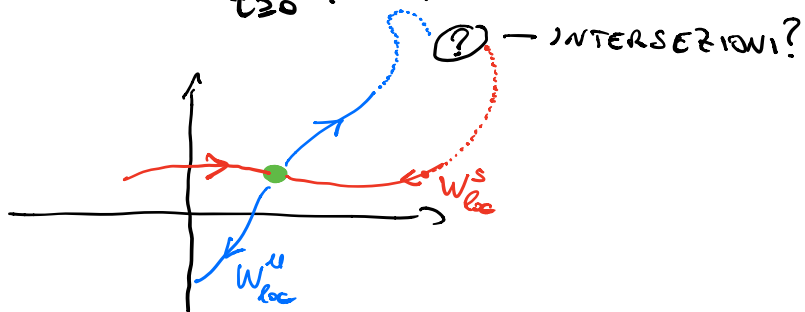
$$W^s(x_0) := \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, W_{loc}^s(x_0))$$

• VARIETÀ INSTABILE GLOBALE

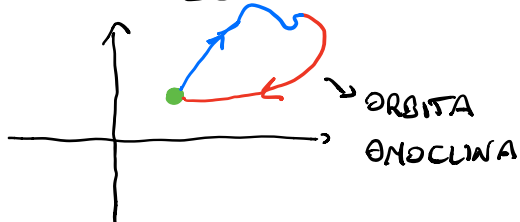
$$W^u(x_0) := \bigcup_{t \geq 0} \phi(t, W_{loc}^u(x_0))$$

Esempi

$n=2$

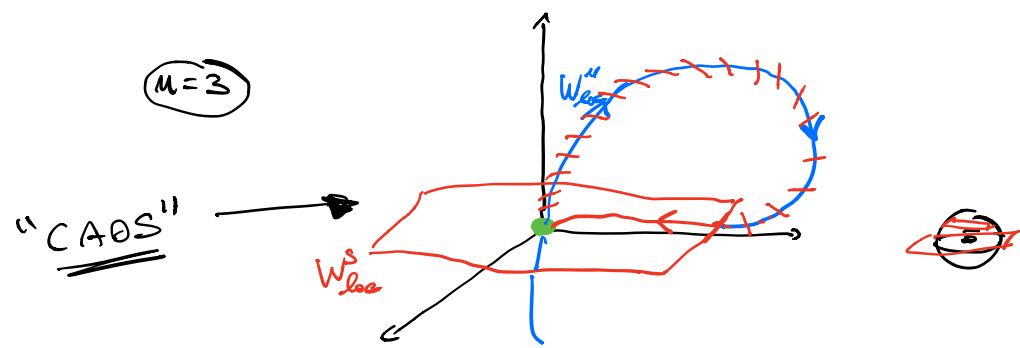


• COINCIDONO



• UN ALTRO PUNTO FISSO





Sistemi piani $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

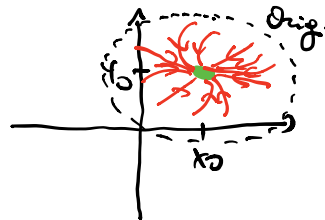
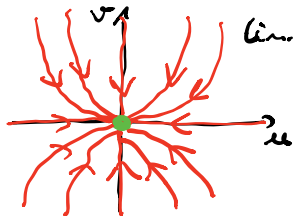
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \in C^1$$

• Punti fissi

Se iperbolici applico il Teorema di Hartman-Grobman
e il Teorema delle Varietà Stabile e Instabile
(Stabilità o instabilità, struttura delle orbite)

Effetti del Termine non lineare. ^(linearizing) (x_0, y_0) punto fisso
 $(F \in C^3)$ iperbolico

- NODO STABILE



$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = JF(x_0, y_0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{\text{Linearizzato}} + \underbrace{O(u^2 + v^2)}_{\text{neg.}}}_{\text{neg.}}$$

- FUOCO

- STELLA E NODI IMPROPRI

- SELLA



• Coordinate polari (ρ, θ) , $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{\rho^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = p \sin \theta \\ \dot{y} = p \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = p \cos \theta \\ \dot{y} = p \sin \theta \end{cases}$$

- Insieme invariante

$$\begin{aligned} \text{• Setto del campo } & \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \\ & \{ f(x,y) \geq 0, g(x,y) \geq 0 \} \end{aligned}$$

$$\text{• Isocline} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x_0, y_0) \neq 0 \\ g(x_0, y_0) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y(x) \text{ soluzione è ISOCLINA}$$

I grafici delle isocline sono insiemi invarianti. Sia $x \mapsto h(x)$ isocline

$$I(x,y) = y - h(x)$$

Il grafico di $h(x)$ è $\{I(x,y)=0\}$.

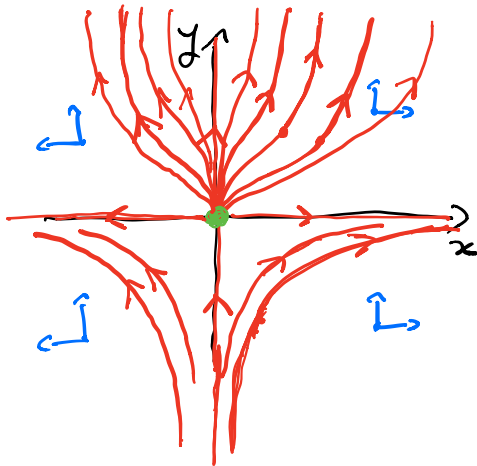
$$\dot{I}(x,y) \Big|_{\{I(x,y)=0\}} = \langle \nabla I, F \rangle \Big|_{\{I(x,y)=0\}} =$$

$$= -h'(x) \dot{x} + 1 \cdot \dot{y} \Big|_{\substack{\{I(x,y)=0\} \\ y=h(x)}} = - \frac{g(x, h(x))}{f(x, h(x))} \cdot f(x, h(x)) + g(x, h(x))$$

$$= 0$$

ES
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$

Punti fissi = $\{(0,0)\}$



$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è iperbolico

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E^u(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} E^s(t) = 1$$

$\{x=0\}$ e $\{y=0\}$ sono invarianti

Su $\{x=0\}$, $\begin{cases} \dot{x}=0 \\ \dot{y}=y^2 \end{cases}$

Su $\{y=0\}$, $\begin{cases} \dot{x}=x \\ \dot{y}=0 \end{cases}$
 $W^u(0,0)$

Isocline

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_0 \neq 0 \\ y_0 \neq 0 \end{matrix}$$

(Variabili separabili) $\int_{y_0}^y \frac{ds}{s^2} = \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} \quad -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = \log \frac{x}{x_0} \quad x_0 > 0$

$$x = x_0 \exp\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}\right)$$

• Simmetrie $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S \in C^1$

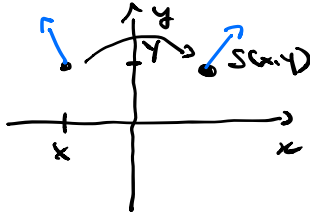
$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = S(x, y) \quad \begin{matrix} \tilde{x} = S_1(x, y) \\ \tilde{y} = S_2(x, y) \end{matrix}$$

Un sistema di eq. diff è invariante per S se $(x(t), y(t))$

soluz. del sistema $\Rightarrow (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ soluz. del sistema

$$d_{(x,y)} S: T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \mathbb{R}^2$$

ES $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$ è invariante per $S(x, y) = (-x, y)$



Sia $(x(t), y(t))$ soluz. del sistema e

$$\tilde{x}(t) = -x(t), \quad \tilde{y}(t) = y(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(t) \stackrel{(x(t), y(t)) \text{ è soluz.}}{=} -x(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

$$f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \tilde{x}(t) = -x(t)$$

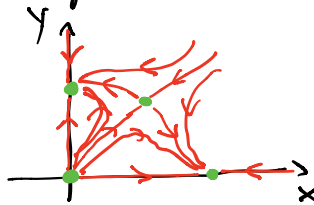
$$\dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) \stackrel{(x(t), y(t)) \text{ è soluz.}}{=} y^2(t) = g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

$$(x(t), y(t)) \text{ è soluz.}$$

$$g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \tilde{y}^2(t) = y^2(t)$$

Esempio Sistemi di tipo Lotka-Volterra.

Conigli - pecore



SPECIE IN
COMPETIZIONE

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(B - a_2y - b_2x) \end{cases}$$

$$A, B, a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$$

PREDATOR-PREY

x predatore
 y preda

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-A + b_1y) \\ \dot{y} = y(B - b_2x) \end{cases}$$

$$A, B, b_1, b_2 > 0$$

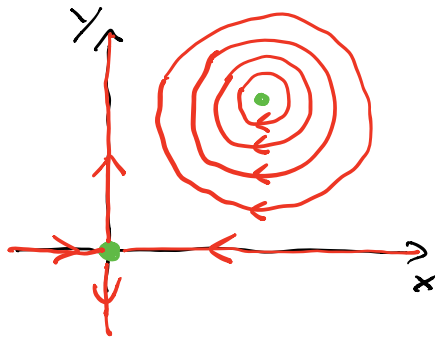
$$\text{Punti fissi} = \left\{ (0,0), \left(\frac{B}{b_2}, \frac{A}{b_1} \right) \right\}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} -A + b_1y & b_1x \\ -b_2y & B - b_2x \end{pmatrix}$$

$$(0,0) \quad JF(0,0) = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{SELLA}$$

$$\left(\frac{B}{b_2}, \frac{A}{b_1}\right) \quad JF\left(\frac{B}{b_2}, \frac{A}{b_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b_1}{b_2} B \\ -\frac{b_2}{b_1} A & 0 \end{pmatrix} \quad \text{CENTRO (non iperbolico)}$$

$$\text{Insieni invarianti} = \{x=0\} \text{ e } \{y=0\}$$



$$\text{Su } \{x=0\}, \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = By \end{cases}$$

$$\text{Su } \{y=0\}, \quad \begin{cases} \dot{x} = -Ax \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Isocline} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y(B-b_2x)}{x(-A+b_1y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$x_0 \neq 0 \text{ e } y_0 \neq 0$$

$$(x_0, y_0) \neq \left(\frac{B}{b_2}, \frac{A}{b_1}\right)$$

$$\int_{y_0}^y \left(-\frac{A}{s} + b_1\right) ds = \int_{x_0}^x \left(\frac{B}{t} - b_2\right) dt$$

$$-A \log \frac{y}{y_0} + b_1(y-y_0) = B \log \frac{x}{x_0} - b_2(x-x_0)$$

$$I(x,y) = -A \log \frac{y}{y_0} - B \log \frac{x}{x_0} + b_1(y-y_0) + b_2(x-x_0)$$

le insieni di livello $\{I=c\}$ invarianti.

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos y \\ \dot{y} = x \sin y \end{cases}$$

$$\text{Punti fissi} : \left\{ (0, \frac{\pi}{2} + k\pi) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

$$JF(0, \frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{CENTRI}$$

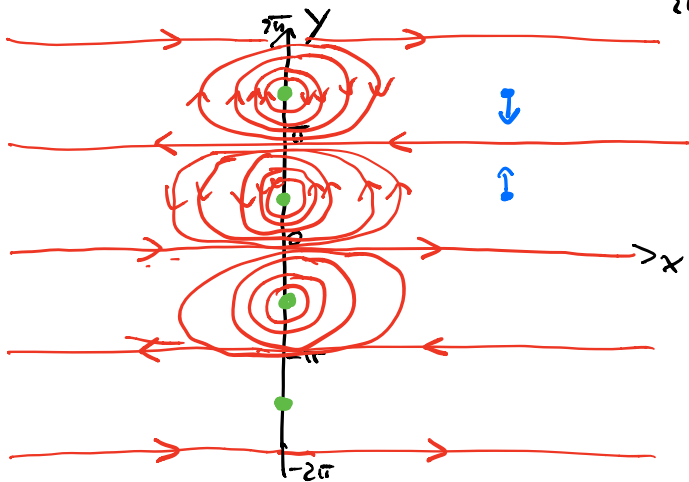
Rette invarianti

$$\cdot I(x, y) = x \quad \exists c \neq 0 \quad \dot{I}|_{\{I=c\}} = 0?$$

$$\dot{I}(x, y) = \cos y|_{\{x=c\}} \neq 0$$

$$\cdot I(x, y) = y \quad \exists c \neq 0 \quad \dot{I}|_{\{I=c\}} = 0?$$

$$\dot{I}(x, y) = x \sin y|_{\{y=c\}} = 0 \quad \text{se } c = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{su } \{y = k\pi\}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (-1)^k \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Isocline

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x \sin y}{\cos y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_0 \neq k\pi$$

$$(x_0, y_0) \neq (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$\int_{y_0}^y \frac{\cos s}{\sin s} ds = \int_{x_0}^x t dt$$

$$0 < y_0 < \pi \Rightarrow \log \frac{\sin y}{\sin y_0} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x_0^2$$

$$I(x, y) = \log \frac{\sin y}{\sin y_0} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x_0^2$$

Il sistema è invariante per la simmetria che manda
 $(x(t), y(t))$ in $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(-t), y(-t) + \pi)$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(-t) \cdot (-1) \stackrel{x(t,y(t)) \text{ è soluz}}{=} -\cos y(-t) \stackrel{?}{=} f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

$$f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \cos \tilde{y}(t) = \cos(y(-t) + \pi) = -\cos y(-t)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = -\dot{y}(-t) \stackrel{?}{=} -x(-t) \sin y(-t) \stackrel{?}{=} g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

$$g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \tilde{x}(t) \sin \tilde{y}(t) = -x(-t) \sin(y(-t))$$

Quale altra simmetria lascia invariante il sistema?

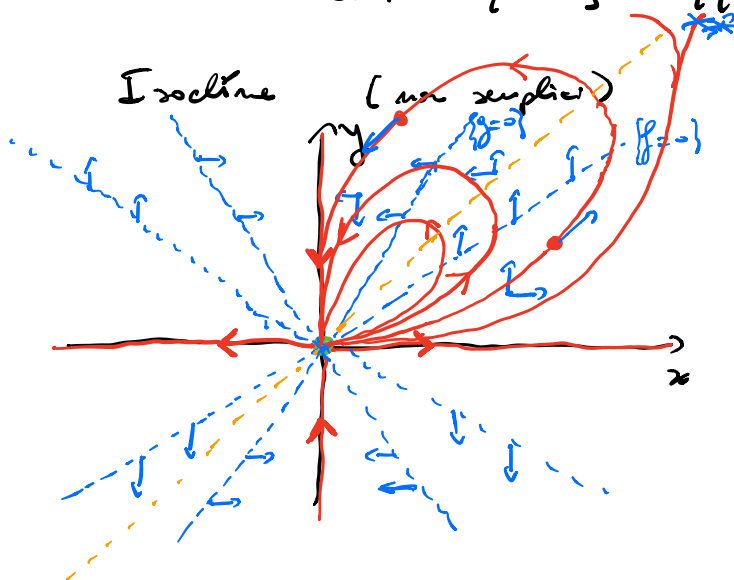
Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 2y^2) \\ \dot{y} = y(2x^2 - y^2) \end{cases}$$

Punti fissi = $\{(0,0)\}$ $JF(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y^2 & -4xy \\ 4xy & 2x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$

$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ NON È IPERBOLICO

Rette invarianti = $\{x=0\}$ e $\{y=0\}$



$$x(x^2 - 2y^2) > 0$$

$$y(2x^2 - y^2) > 0$$

Il sistema è inv. se manda $(x(t), y(t))$ in
 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (y(-t), x(-t))$

Orbite periodiche in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \quad f, g \in C^1$$

• Non esistenza

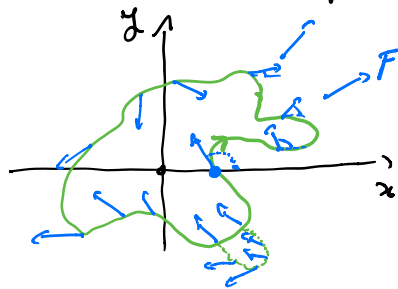
Indice di Poincaré

Def. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ curva chiusa e semplice, e tale che non contenga punti fissi di $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$.

Si chiama INDICE DI POINCARÉ DI Γ il numero

$$I_F(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(\arctan \frac{g}{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2} \in \mathbb{Z}$$

(Γ via C^1 e f, g interi)

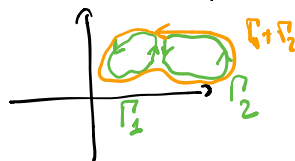


$I_F(\Gamma) =$ "il numero di giri in senso antiorario che compie F mentre mi muovo lungo Γ "

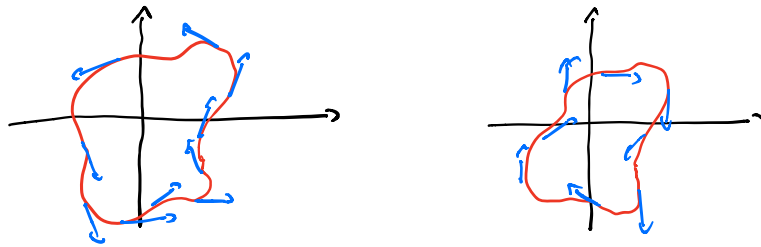
Prop. Dato F campo di vettori in $\mathbb{R}^2$, l'indice di Poincaré di una curva soddisfa:

- (i) se $t \mapsto \Gamma_t$ è una famiglia continua di curve chiuse e semplici, allora $I_F(\Gamma_t)$ è costante se nessuna Γ_t contiene punti fissi di F ;
- (ii) se Γ_1, Γ_2 sono curve chiuse e semplici che non contengono punti fissi di F ,

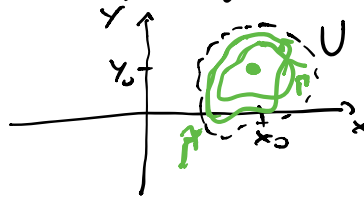
$$I_F(\Gamma_1 + \Gamma_2) = I_F(\Gamma_1) + I_F(\Gamma_2)$$



(iii) se Γ è un'orbita di F , allora $I_F(\Gamma) = +1$
periodica



Def. Sia (x_0, y_0) un punto fisso di F isolato ($\exists U(x_0, y_0)$ in cui non ci sono altri punti fissi), allora si definisce
INDICE DI POINCARÉ DI (x_0, y_0) , $I_F(x_0, y_0)$,
l'indice $I_F(\Gamma)$ di Γ chiusa e semplice che circonda (x_0, y_0)
e nessun altro punto fisso di F .



Prop. Sia (x_0, y_0) punto fisso isolato di F tale che
 $\det JF(x_0, y_0) \neq 0$. Allora

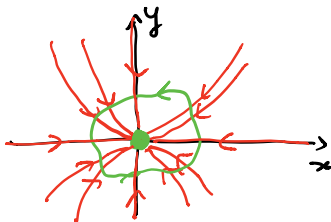
- se (x_0, y_0) è un nodo, un fuoco, una sella, un
nodo improprio o un centro ($\det JF(x_0, y_0) > 0$), allora

$$I_F(x_0, y_0) = +1;$$

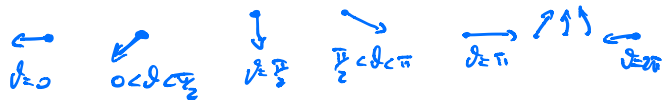
- se (x_0, y_0) è una sella ($\det JF(x_0, y_0) < 0$), allora

$$I_F(x_0, y_0) = -1.$$

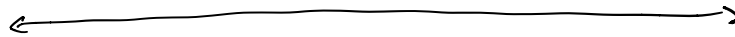
ES



Parametrizzo Γ con θ



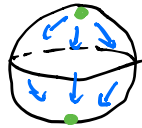
$$\Rightarrow I_F(0,0) = +1$$



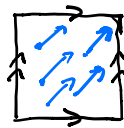
oss F campo di vettori su Σ compatta e connessa,

$$\sum_{P_i \text{ punto fisso}} I_F(P_i) = \chi(\Sigma) \quad \text{CARATTERISTICA DI EULERO}$$

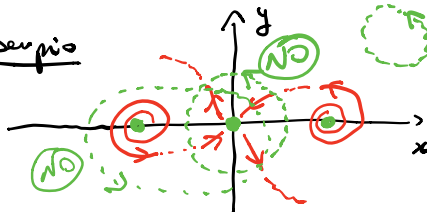
esempio $\Sigma = \text{sfera}$, $\chi(\Sigma) = 2 \Rightarrow \exists$ campi di vettori con
un unico punto fisso
non-degenero
o zero punti fissi



$\Sigma = \text{toro}$, $\chi(\Sigma) = 0$, infatti $\exists$ campi di vettori
senza punti fissi

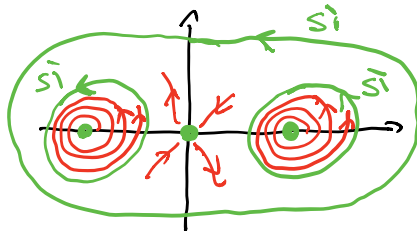


Esempio



• Se Γ è orbita periodica, deve
racchiudere almeno un punto fisso
($I_F(\Gamma) = +1$)

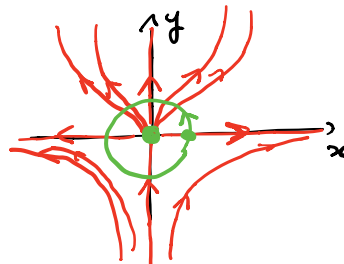
$$\sum_{\substack{P_i \text{ punto fisso incluso} \\ \text{racchiuso da } \Gamma}} I_F(P_i) = I_F(\Gamma)$$



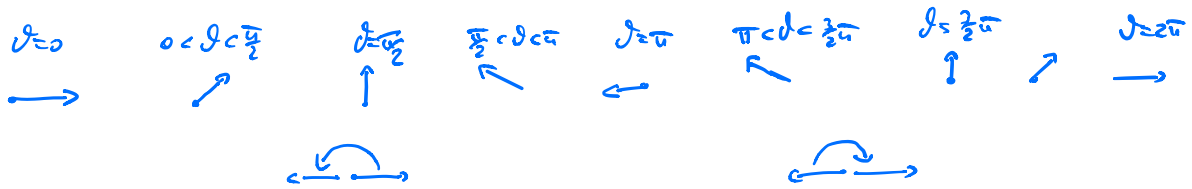
$$\left(\begin{array}{l} \text{Diagramma con tre regioni } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \text{ e punti fissi } P_1, P_2, P_3 \\ I_F(\Gamma) = \\ = I_F(\Gamma_1) + I_F(\Gamma_2) + \\ + I_F(\Gamma_3) = \\ = I_F(P_1) + I_F(P_2) + \\ + I_F(P_3) \end{array} \right)$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y^2 \end{cases}$$



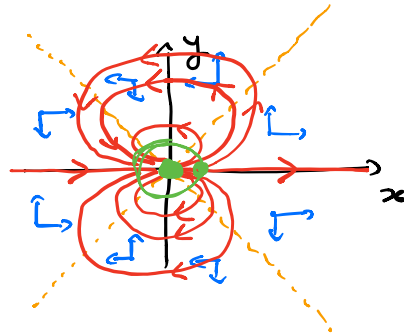
$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$I_F(0,0) = 0$$

Esempio

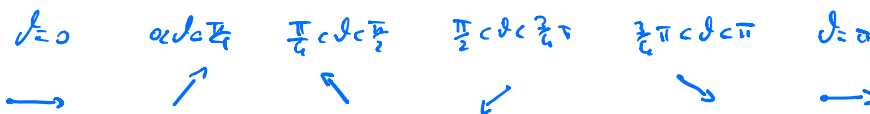
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$



oss

$$\tilde{z} = z^2 \\ z = x + iy$$

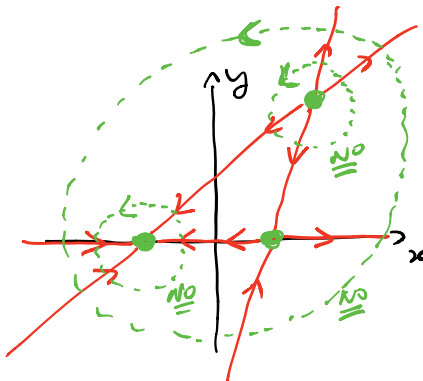
$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$I_F(0,0) = 2$$



Esempio



For orbite periodiche

dim teoria dell'indice.

Metodo del rotore

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

$$f, g \in C^1, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \\ F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Proposizione Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, semplicemente connesso,
 v.c. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ in U . [$\text{rot } F = 0$ in U].

Allora $\exists$ orbite periodiche in U .

dim Se $\text{rot } F = 0$ in U , allora poiché U è semplicemente connesso, $\exists h: U \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $F = \nabla h$.

Sia Γ orbita periodica in U , parametrizzata da $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, allora $\gamma(0) = \gamma(T)$ e

$$0 = h(\gamma(T)) - h(\gamma(0)) = \int_0^T \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) dt = \int_0^T \langle \nabla h(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$$= \int_0^T \langle \underset{\uparrow}{F(\gamma(t))}, F(\gamma(t)) \rangle dt = \int_0^T |F(\gamma(t))|^2 dt > 0$$

Assurdo

$\gamma'(t) = F(\gamma(t))$ □

oss $\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} \\ \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$ sistemi di tipo
 gradiente $F = \nabla h$

$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$ sistemi di tipo
 hamiltoniano $F = J \cdot \nabla H$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

oss Se in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\dot{x} = F(x)$ con $F = \nabla h$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 allora $\exists$ orbite periodiche.

Esempio $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x + (x + y) e^{-y^2} \end{cases}$ $\exists$ orbite periodiche in $\mathbb{R}^2$
 $F = \nabla h$ con $h(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + xy + \int (x + y) e^{-y^2} dy$

Criterio di BENDIXSON

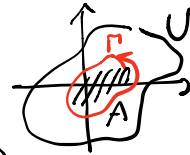
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Teorema

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e semplicemente connesso tale che
 $\operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in U$. Allora
(< 0)
non esistono orbite periodiche in U .

dim

Sia Γ orbite periodiche in U di periodo $T > 0$



$$0 < \iint_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{\text{GREEN}}{=} \int_{\Gamma} (-g dx + f dy)$$

$$\stackrel{\Gamma = (x(t), y(t))}{\text{soluzione}} = \int_0^T \left(-g(x(t), y(t)) \underbrace{\dot{x}(t)}_{f(x(t), y(t))} + f(x(t), y(t)) \underbrace{\dot{y}(t)}_{g(x(t), y(t))} \right) dt$$

$$= 0 \quad . \quad \text{ASSURDO}$$

□

Esempio L'eq. diff di un oscillatore forzato o smorzato

(pendolo) $\ddot{x} + a(x)\dot{x} + k \sin x = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a(x)y - k \sin x \end{cases}$$

$$\operatorname{div} F = -a(x)$$

Se $a(x) > 0$ o $a(x) < 0 \quad \forall x \Rightarrow \nexists$ orbite periodiche

Teorema (Dulac) Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e semplicemente connesso

e sia $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 v.c.

$$\operatorname{div}(\rho F) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho f)(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho g)(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in U$$

(< 0)

allora non ci sono orbite periodiche in U .

dim vedi sopra

□

Esempio Sistemi di tipo Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - a_1x - b_1y) \\ \dot{y} = y(B - a_2y - b_2x) \end{cases} \quad a_1, a_2 \geq 0$$

Specie in competizione

$$A, B > 0, \quad b_1, b_2 > 0$$

Se $a_1 > 0$ oppure $a_2 > 0$, non
esistono orbite periodiche

Preda - predatore

$$A < 0, B > 0, \quad a_1 = 0$$

$$b_1 < 0, b_2 > 0, \quad a_2 = 0$$

ORBITE PERIODICHE

$$U = \{x > 0, y > 0\} \quad \rho(x, y) = \frac{1}{xy} \in C^1(U)$$

$$\operatorname{div}(\rho F) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{y} (A - a_1x - b_1y) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{x} (B - a_2y - b_2x) \right]$$

$$= -\frac{a_1}{y} - \frac{a_2}{x} < 0 \quad \forall (x, y) \in U \quad \text{se}$$

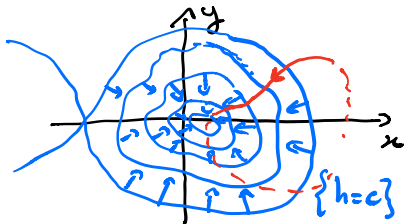
$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0$$

(come almeno una è positiva)

←—————→

oss

Sistemi di tipo gradiente, $F = \nabla h$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$



Criterio della divergenza $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ flusso di F .

$$A \subset \mathbb{R}^n, \text{ studio } \phi_t(A) = \{ \phi_t(x) \mid x \in A \}$$

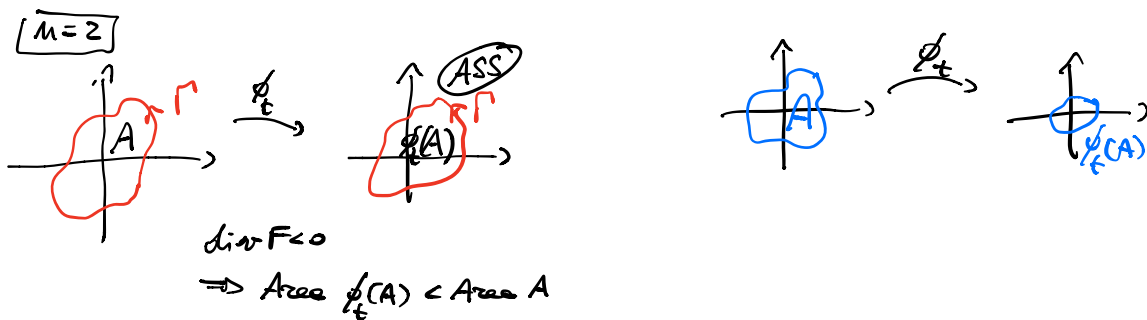
$$\text{vol}_n(\phi_t(A)) = \int_{\phi_t(A)} 1 \cdot d\mu_n = \int_A |\det J_{\phi_t}| d\mu_n$$

$$\text{Ho che } \frac{d}{dt} \phi_t(x) = F(\phi_t(x)) \Rightarrow \frac{d}{dt} J_{\phi_t}(x) = JF(\phi_t(x)) J_{\phi_t}(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det J_{\phi_t}(x) &= \exp\left(\int_0^t \text{tr}(JF(\phi_s(x))) ds\right) \\ &= \exp\left(\int_0^t \text{div}[F(\phi_s(x))] ds\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \text{div } F < 0 \text{ in } \mathbb{R}^n &\Rightarrow \det J_{\phi_t}(x) < 1 \quad \forall t \\ &\Rightarrow \text{vol}_n(\phi_t(A)) < \text{vol}_n(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \text{div } F > 0 \text{ in } \mathbb{R}^n &\Rightarrow \det J_{\phi_t}(x) > 1 \quad \forall t \\ &\Rightarrow \text{vol}_n(\phi_t(A)) > \text{vol}_n(A) \end{aligned}$$



$n=3$ Eq. di Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x+y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

$$\sigma, r, b > 0$$

$$\text{div } F = -\sigma - 1 - b < 0 \text{ in } \mathbb{R}^3$$

L'insieme verso cui convergono tutte le orbite è un insieme di volume nullo.

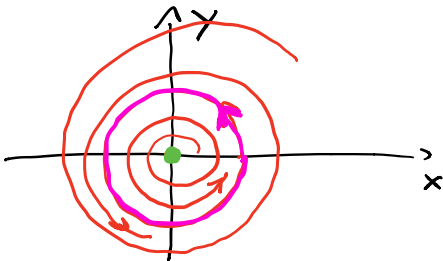
$$\begin{aligned} \text{vol } \phi_t(A) &= \int_A \exp\left(\int_0^t (-\sigma - 1 - b) ds\right) dx \\ &= e^{-(\sigma+1+b)t} \text{vol}(A) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ESISTENZA DI ORBITE PERIODICHE

- Isocline
- Integrali del moto
- Insiemi invarianti

Esempio In coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) + \varepsilon f(\rho, \theta) \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon g(\rho, \theta) \end{cases}$$

$$f, g \in C^0$$

∃ ORBITA PERIODICA?
per ε piccolo

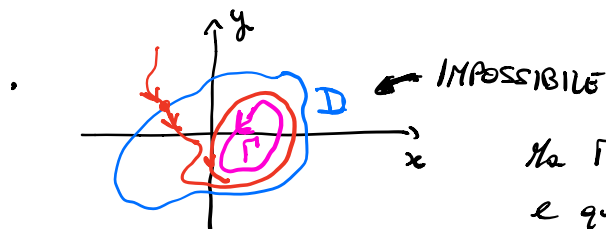
Orbite periodiche asintoticamente
stabile

TEOREMA (POINCARÉ - BENDIXSON)

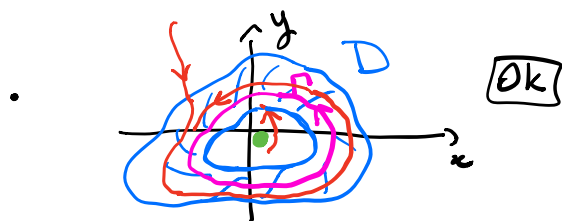
Sia F un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ di classe C^1 , e
sia $D \subset \mathbb{R}^2$ non vuoto, compatto e privo di punti

fino di F . Se $\exists x \in \mathbb{R}^2$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ t.c.
 $\phi_t(x) \in D \quad \forall t \geq t_0$, allora $\exists \Gamma \subset D$ orbita
 periodica con $\Gamma = \omega(x)$.

OSS • D compatto, $\phi_t(x) \in D \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow \omega(x) \subset D$
 $\omega(x) \neq \emptyset$

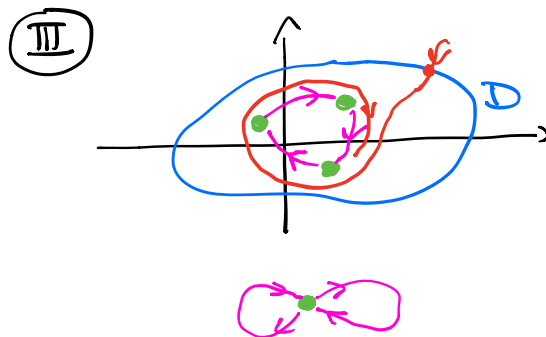
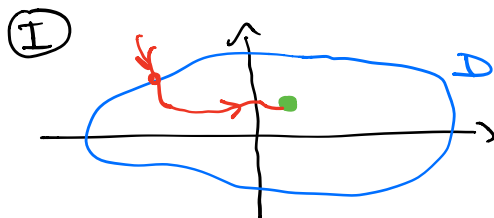


Ma Γ ha indice ± 1
 e quindi deve racchiudere
 un punto fisso.



TEOREMA Sia F un campo di vettori in $\mathbb{R}^2$ di classe C^1
 e $D \subset \mathbb{R}^2$ non vuoto e compatto. Sia $x \in \mathbb{R}^2$ per
 cui $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\phi_t(x) \in D \quad \forall t \geq t_0$. Allora
 $\omega(x) \subset D$, è non vuoto, e può essere:

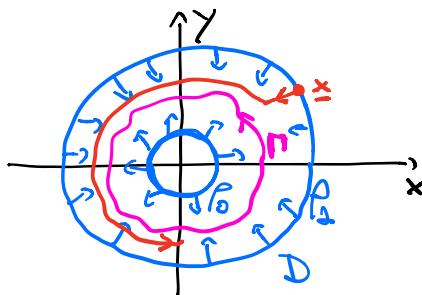
- un punto fisso;
- un'orbita periodica;
- un numero finito di punti fissi e un
 numero finito di orbite omocline o
 eterocline.



Esempio

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2) + \varepsilon f(\rho, \vartheta) \\ \dot{\vartheta} = 1 + \varepsilon g(\rho, \vartheta) \end{cases}$$

$$f, g \in C^0$$



D non contiene punti fissi

Prop. $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, il sistema ammette un'orbita periodica.

dim. Fissato A grande

$$L = \|f\|_{\infty, \{\rho \leq A\}} + \|g\|_{\infty, \{\rho \leq A\}}$$

Studio al segno di $\dot{\rho}$. Voglio che $\exists \rho_0$ v.c.

$$\dot{\rho}|_{\partial B_{\rho_0}(\vartheta)} > 0, \quad \exists \rho_1 > \rho_0 \text{ v.c. } \dot{\rho}|_{\partial B_{\rho_1}(\vartheta)} < 0.$$

$$\begin{aligned} \rho_0 = \frac{1}{2} \quad \dot{\rho}|_{\partial B_{\frac{1}{2}}(\vartheta)} &= \rho(1-\rho^2) + \varepsilon f(\rho, \vartheta) \Big|_{\partial B_{\frac{1}{2}}(\vartheta)} = \\ &= \frac{3}{8} + \varepsilon f(\rho_0, \vartheta) > \frac{3}{8} - \varepsilon L > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon < \frac{3}{8L}$$

$$p_1 = 2 \quad \dot{p}_1 / \partial p_1(q) = -6 + \varepsilon f(p_1, q) < -6 + \varepsilon L < 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon < \frac{6}{L}$$

Voglio mostrare che D non contiene punti fissi.

$$\dot{q} = 1 + \varepsilon g(p, q) \neq 0 \quad \forall (p, q) \in \left\{ \frac{1}{2} \leq p \leq 2 \right\} = D$$

$$1 + \varepsilon g(p, q) > 0 \quad \forall (p, q) \in D$$

$$1 + \varepsilon g(p, q) \geq 1 - \varepsilon L > 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{L}.$$

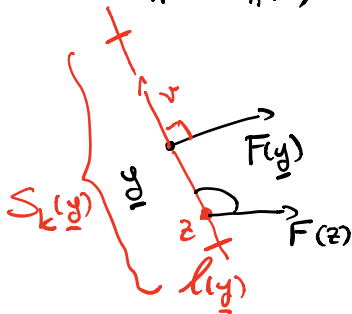
Resta che $\varepsilon_0 = \frac{3}{8L}$. Allora $\exists$ orbita periodica in D . $\square$

Teorema di Poincaré - Bendixson

Sia $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 , e sia $D \subset \mathbb{R}^2$ non vuoto, compatto e privo di punti fissi di F . Dato il flusso $\varphi(t, \cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di F , se $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(t, x_0) \in D \ \forall t \geq t_0$ allora $\exists$ un'orbita periodica $\Gamma \subset D$ per il campo F .

Dimostrazione

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t, \cdot)$ il flusso e sia $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $F(\underline{y}) \neq 0$.



Si chiama RETTA TRASVERSALE A F IN $\underline{y}$,

$l(\underline{y})$, l'immagine di una funzione

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(u) = \underline{y} + u \cdot \underline{v}$$

dove $\underline{v}$ vettore applicato in $\underline{y}$ t.c.

$$\langle \underline{v}, F(\underline{y}) \rangle = 0$$

Def. Dato $k \in [0, 1)$, si chiama SEZIONE LOCALE

DI "AMPIEZZA" k $N_{\underline{y}}, S_k(\underline{y})$, l'insieme degli

$$\underline{z} \in l(\underline{y}) \quad \text{t.c.} \quad |\sin(\underline{v} \wedge F(\underline{z}))| > k.$$

Consideriamo da ora in poi k fissato.

Lemma (rettificabilità locale dei campi di vettori)

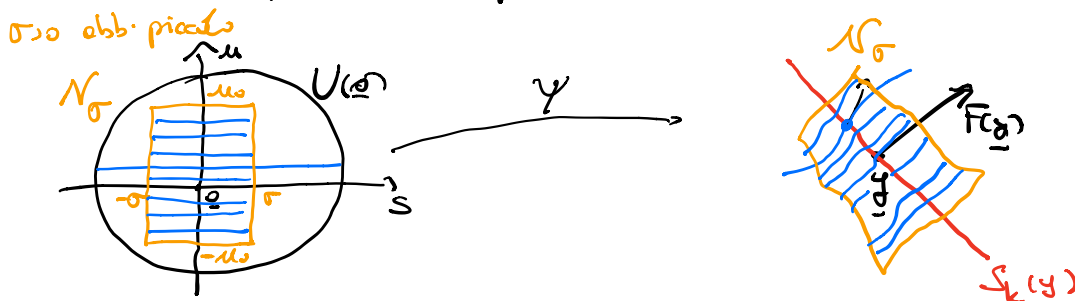
Siano $F \in C^1$ in $\mathbb{R}^2$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $F(\underline{y}) \neq 0$, e

$S_k(\underline{y})$ sezione locale. Allora esiste un diffeomorfismo

$$\psi: U(\underline{y}) \rightarrow V(\underline{y}) \quad \text{con } U(\underline{y}) \subset \mathbb{R}_{(s,u)}^2 \quad \text{e}$$

$V(\underline{y}) \subset \mathbb{R}^2$ intorno di $\underline{y}$, tale che

$$\psi(s, u) = \varphi(s, \gamma(u)) \quad \forall (s, u) \in U(\underline{y})$$



Chiamiamo σ -RETTANGOLO DI FLUSSO, l'insieme

$$N_\sigma = \psi(N_\sigma) \text{ dove } N_\sigma = \{(s, u) : |s| < \sigma, |u| < u_0\}$$

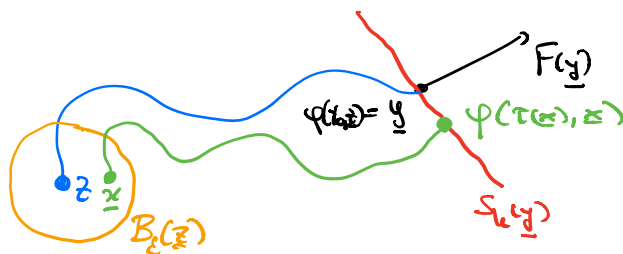
Per ogni $\underline{z} \in N_\sigma \exists s \in (-\sigma, \sigma)$ t.c. $\varphi(s, \underline{z}) \in S_k(\underline{y})$

Lemma 1 $F(\underline{y}) \neq 0$, $S_k(\underline{y})$. Sia $\underline{z} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\exists t_0 > 0$ che

verifichi $\varphi(t_0, \underline{z}) = \underline{y}$. Allora $\exists \varepsilon > 0$ e una

funzione $\tau: B_\varepsilon(\underline{z}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale

$$\varphi(\tau(\underline{x}), \underline{x}) \in S_k(\underline{y}) \quad \forall \underline{x} \in B_\varepsilon(\underline{z}).$$



$$\underline{\text{def}} \quad p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad p(x_1, x_2) := x_1 F_1(\underline{y}) + x_2 F_2(\underline{y}) \\ = \langle \underline{x}, F(\underline{y}) \rangle$$

Osserviamo che $p(\underline{y}) = p(\underline{x}) \Leftrightarrow \underline{x} \in \ell(\underline{y})$.

$$\text{Infatti } p(\underline{y} + \underline{w}) = p(\underline{y}) + p(\underline{w}) = p(\underline{y}) \Leftrightarrow p(\underline{w}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle \underline{w}, F(\underline{y}) \rangle = 0 \Leftrightarrow \underline{y} + \underline{w} \in \ell(\underline{y}).$$

Introduciamo $q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$q(\underline{x}, t) = p(\varphi(t, \underline{x}))$. Mostriamo che possiamo applicare il Teorema delle Funzioni implicite.

$$\cdot q(\underline{z}, t_0) = p(\varphi(t_0, \underline{z})) = p(\underline{y})$$

$$\cdot \frac{\partial q}{\partial t}(\underline{z}, t_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t}(\underline{z}, t_0) &= p(\dot{\varphi}(t_0, \underline{z})) = p(F(\varphi(t_0, \underline{z}))) = \\ &= p(F(\underline{y})) = \langle F(\underline{y}), F(\underline{y}) \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Ne segue che $\exists \varepsilon > 0$ e $\tau: B_\varepsilon(\underline{z}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$\tau(\underline{z}) = t_0, \quad q(\underline{x}, \tau(\underline{x})) = q(\underline{z}, t_0) \quad \forall \underline{x} \in B_\varepsilon(\underline{z})$$

$$\Leftrightarrow [p(\varphi(\tau(\underline{x}), \underline{x})) = p(\underline{y}) \quad "]$$

$$\Leftrightarrow [\varphi(\tau(\underline{x}), \underline{x}) \in \ell(\underline{y}) \quad "]$$

τ è continua. $\square$

Passiamo alla dimostrazione vera e propria.

Sappiamo che $\exists \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(t, \underline{x}_0) \in D$ compatto ^{senza} _{parte fin}
 $\forall t \geq t_0$.

Allora $\omega(\underline{x}_0) \subset D$, $\omega(\underline{x}_0) \neq \emptyset$, $\omega(\underline{x}_0)$ è invariante.

Mostriamo che $\forall \underline{x} \in \omega(\underline{x}_0)$ si ha che $\varphi(\underline{x})$ è periodica Γ ,
 e che $\Gamma = \omega(\underline{x}_0)$.

Però I $\forall \underline{x} \in \omega(\underline{x}_0)$ si ha $\varphi(\underline{x})$ è periodica

Fissiamo $\underline{x} \in \omega(\underline{x}_0)$ e se $\underline{y} \in \omega(\underline{x}) \subset \omega(\underline{x}_0)$, $F(\underline{y}) \neq 0$,
 e usiamo $S_\sigma(\underline{y})$, $N_\sigma(\underline{y})$ con $\sigma > 0$.

Lemma 2 $\# (\mathcal{O}^+(x) \cap S_k(y)) = 1$

dim $y \in \omega(x) \Leftrightarrow \exists t_n \nearrow +\infty$ t.c. $\varphi(t_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$

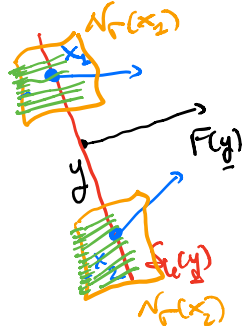
Quindi per un ab. grande, $\varphi(t_n, x) \in \mathcal{N}_\sigma$, e

quindi $\exists t$ t.c. $\varphi(t, x) \in S_k(y)$.

$\Rightarrow \# (\mathcal{O}^+(x) \cap S_k(y)) \geq 1$.

Mostriamo che supponendo $x_1, x_2 \in \mathcal{O}^+(x) \cap S_k(y)$ con $x_1 \neq x_2$ otteniamo un assurdo.

x_0



$x_1, x_2 \in \mathcal{O}^+(x)$, $x \in \omega(x_0)$

$\Rightarrow x_1, x_2 \in \omega(x_0)$.

$\Rightarrow \exists \{t_k^1\}, \{t_k^2\} \nearrow +\infty$ t.c.

$\varphi(t_k^1, x_0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_1$, $\varphi(t_k^2, x_0) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x_2$

$\Rightarrow \exists$ infiniti valori t t.c. $\varphi(t, x_0) \in N_\sigma(x_1)$ e

$\exists$ " " " " " $\varphi(t, x_0) \in N_\sigma(x_2)$

$\Rightarrow \exists$ infiniti valori t t.c. $\varphi(t, x_0) \in S_k(y) \cap N_\sigma(x_1)$

$\exists$ " " " " " $\varphi(t, x_0) \in S_k(y) \cap N_\sigma(x_2)$

Ma sia $\{z_n\}$ una successione in $\mathcal{O}^+(x_0) \cap S_k(y)$, allora

si ha che, preso un ordinamento in $S_k(y)$, vale

$z_{n-1} < z_n < z_{n+1} \quad \forall n$

opp. $z_{n-1} > z_n > z_{n+1} \quad \forall n$.

$\Sigma = \overline{z_{n-1} z_n} \cup \bigcup_{t=t_{n-1}}^{t_n} \varphi(t, x_0)$

con $z_{n-1} = \varphi(t_{n-1}, x_0)$

$z_n = \varphi(t_n, x_0)$



e R la regione recchiusa da Σ . Allora $\forall t > t_m$
 $\Rightarrow$ ha $\varphi(t, x_0) \in R$. Quindi $z_{m+1} > z_m > z_{m-1}$.

Quindi la monotonia delle intersezioni: $\mathcal{V}^+(x_0) \cap \Sigma_k(y)$
 implica che non possono esistere le successioni di valori
 per cui $\varphi(t, x_0)$ salta da $N_G(x_1)$ a $N_G(x_2)$ e
 viceversa. Quindi è ovvio che $x_1 \neq x_2$. $\square$

Quindi per il Lemma 2, $\mathcal{V}^+(x) \cap \Sigma_k(y) = \{ \varphi(\bar{t}, x) \}$.

Ma $y \in \omega(x) \Leftrightarrow \exists t_m \nearrow +\infty$ t.c. $\varphi(t_m, x) \rightarrow y$

$\Rightarrow \exists s_m$ t.c. $\varphi(t_m + s_m, x) \in \Sigma_k(y)$

$s_m \in (-\sigma, \sigma)$

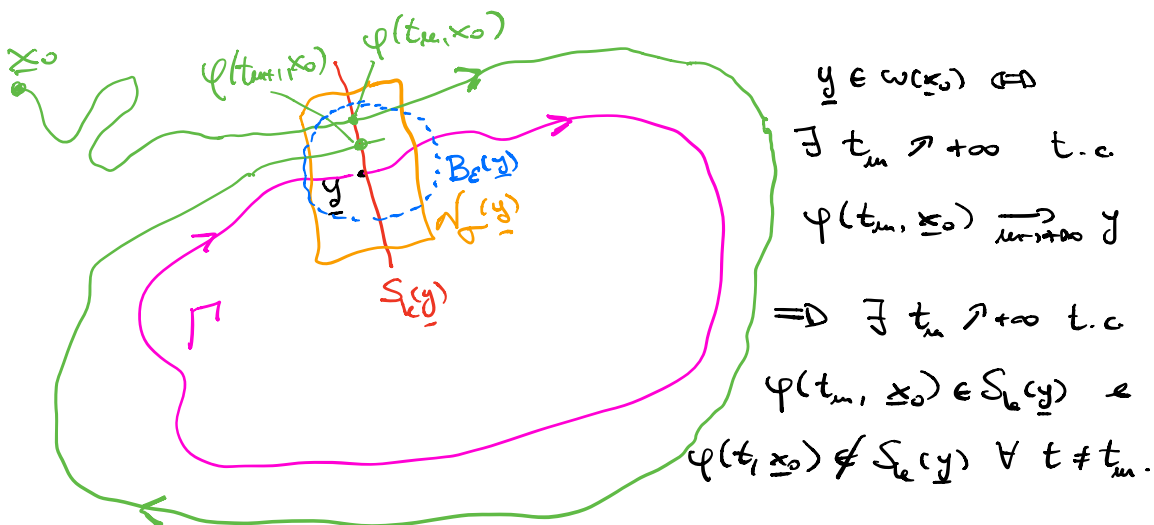
$\Rightarrow \varphi(t_m + s_m, x) = \varphi(\bar{t}, x) \quad \forall m$.

$\Rightarrow \mathcal{V}^+(x)$ è periodica. $\Gamma \quad \square$ primo passo.

Passo II $\Gamma = \omega(x_0)$.

- $\Gamma \subset \omega(x_0)$ deriva da $\Gamma = \mathcal{V}(x)$, $x \in \omega(x_0)$

- $\omega(x_0) \subset \Gamma$.



Usiamo il Lemma 1, con $T = \text{periodo di } \Gamma$
e $\underline{y}$. Infatti $\varphi(T, \underline{y}) = \underline{y}$. Quindi
 $\exists \varepsilon > 0$ e $\tau: B_\varepsilon(\underline{y}) \rightarrow \mathbb{R}$ continua t.c.
 $\tau(\underline{y}) = T$, $\varphi(\tau(\underline{z}), \underline{z}) \in S_k(\underline{y}) \quad \forall \underline{z} \in B_\varepsilon(\underline{y})$.

A meno di scegliere ε più piccolo, suppongo che
 $\varphi(T, \underline{z}) \in \mathcal{V}_\sigma \quad \forall \underline{z} \in B_\varepsilon(\underline{y})$.

Quindi per un abb. grande posso supporre che
 $\varphi(t_m, \underline{x}_0) \in B_\varepsilon(\underline{y}) \cap S_k(\underline{y})$, e quindi
 $\varphi(T, \varphi(t_m, \underline{x}_0)) \in \mathcal{V}_\sigma$. Ne allora $\exists s_m \in (-\sigma, \sigma)$
t.c. $\varphi(T + s_m, \varphi(t_m, \underline{x}_0)) \in S_k(\underline{y})$, e quindi

$$\varphi(T + s_m + t_m, \underline{x}_0) \in S_k(\underline{y}) \Rightarrow t_{m+1} = T + s_m + t_m$$

$$\Rightarrow t_{m+1} - t_m \leq T + \sigma.$$

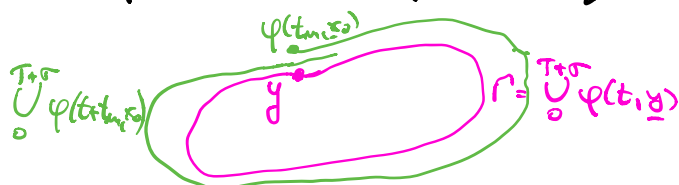
Usiamo la continuità del flusso delle condizioni iniziali
su intervalli compatti di tempo.

Fissato $\eta > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $d(\underline{z}_1, \underline{z}_2) < \delta$

$$\Rightarrow d(\varphi(t, \underline{z}_1), \varphi(t, \underline{z}_2)) < \eta \quad \forall t \in (-T - \sigma, T + \sigma)$$

Quindi scegli $\underline{z}_1 = \varphi(t_m, \underline{x}_0)$, $\underline{z}_2 = \underline{y}$, ho che

$$d(\varphi(t + t_m, \underline{x}_0), \varphi(t, \underline{y})) < \eta \quad \forall t \in (0, T + \sigma)$$



$$d(\varphi(t, x_0), \Gamma) < \eta \quad \forall t \in (t_n, t_{n+1}) \text{ per un } \eta \text{ abbastanza piccolo}$$

$$\Rightarrow d(\varphi(t, x_0), \Gamma) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \omega(x_0) \subset \Gamma$$

□ secondo passo

□ Tenere P-B.

Ejemplo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x \\ \dot{y} = x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y \end{cases}$$



$(0,0)$ es un punto fijo, $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{tr } DF(0,0) = 2$, $\det DF(0,0) = 2$

H.C. $\Rightarrow (0,0)$ es un foco inestable

$x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} = \rho \left[1 - \rho^2 \overbrace{(\cos^4 \vartheta + \frac{1}{2} \sin^4 \vartheta + \frac{5}{2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta)}^{A(\vartheta)} \right] \\ \dot{\vartheta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{\rho^2} = 1 + \rho^2 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(x^2 - \cancel{xy} - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x^2 + \cancel{xy} + y^2 - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(x^2 + y^2 - x^4 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{5}{2}x^2y^2 \right) =$$

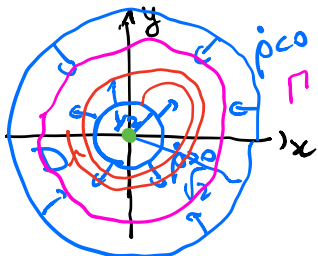
$$= \frac{1}{\rho} \left(\rho^2 - \rho^4 \cos^4 \vartheta - \frac{1}{2} \rho^4 \sin^4 \vartheta - \frac{5}{2} \rho^4 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \right)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \left(x^2 + \cancel{xy} - (\cancel{x^2} + \frac{1}{2}y^2)xy - \cancel{xy} + y^2 + (\cancel{x^2} + \frac{3}{2}y^2)xy \right)$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left(x^2 + y^2 + xy^3 \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(\rho^2 + \rho^4 \cos \vartheta \sin^3 \vartheta \right)$$

Studiamo il segno di $\dot{\rho} = \rho [1 - \rho^2 A(\vartheta)]$ con

$$A(\vartheta) = \cos^4 \vartheta + \frac{1}{2} \sin^4 \vartheta + \frac{5}{2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta$$



$$\forall \vartheta, \quad A(\vartheta) \leq 4$$

$$\begin{aligned} A(\vartheta) &= (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2 - \frac{1}{2} \sin^4 \vartheta + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \sin^4 \vartheta \geq \frac{1}{2} \quad \forall \vartheta \end{aligned}$$

$$\forall \vartheta \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{2} \leq A(\vartheta) \leq 4$$

$$\rho(1-4\rho^2) \leq \dot{\rho} = \rho(1-\rho^2 A(\vartheta)) \leq \rho(1-\frac{1}{2}\rho^2)$$

$$\text{Se } \rho > \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\rho^2 < 0 \Rightarrow \dot{\rho} < 0 \text{ su } \partial B_{\sqrt{2}}(\underline{0})$$

$$\text{Se } \rho < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 4\rho^2 > 0 \Rightarrow \dot{\rho} > 0 \text{ su } \partial B_{\frac{1}{2}}(\underline{0})$$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}\}$ soddisfa l'ipotesi di essere non-vuoto, compatto, e se $\exists \underline{x}_0$ e $\underline{t}_0$ s.c. $\varphi(\underline{t}_0, \underline{x}_0) \in D$ allora $\varphi(t, \underline{x}_0) \in D \quad \forall t \geq \underline{t}_0$.

Rimane da verificare che D non contiene punti fissi.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2 A(\vartheta)) \\ \dot{\vartheta} = 1 + \rho^2 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$$

I punti fissi sono soluzioni

$$\begin{cases} \rho(1 - \rho^2 A(\vartheta)) = 0 \\ 1 + \rho^2 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

con $\rho \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = \frac{1}{A(\vartheta)} \\ 1 + \frac{\sin^3 \vartheta \cos \vartheta}{A(\vartheta)} = 0 \end{cases} \quad \nexists \text{ punti fissi con } \rho \neq 0$$

$$1 + \frac{\sin^3 \vartheta \cos \vartheta}{A(\vartheta)} \geq 1 - \frac{|\sin^3 \vartheta \cos \vartheta|}{A(\vartheta)} \geq 1 - \frac{\sqrt{27}}{16 A(\vartheta)} > 0 \quad \forall \vartheta$$

$$\max_{[\vartheta, \pi]} |\sin^3 \vartheta \cos \vartheta| = \frac{\sqrt{27}}{16}$$

$$\Downarrow \\ A(\vartheta) > \frac{\sqrt{27}}{16} \quad \forall \vartheta$$

$$\frac{\sqrt{27}}{16} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{27} < 8$$

Quindi possiamo applicare il Teorema di Poincaré - Bendixson a D , e quindi $\exists \Gamma \subset D$ orbita periodica.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) (x^3 - x) \\ \dot{y} = x^3 - x - \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) y \end{cases}$$

Punti fissi $(0,0), (1,0), (-1,0)$

Poniamo $V(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

Quando $V(x,y) \neq 0$ il sistema $\begin{cases} -y - V(x,y)(x^3 - x) = 0 \\ x^3 - x - V(x,y)y = 0 \end{cases}$

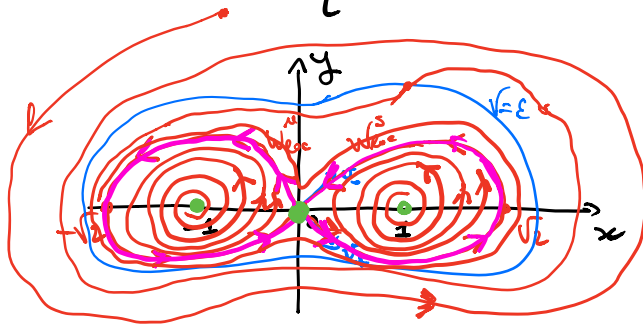
è equivalente a $\begin{cases} -y(1 + V(x,y)) - \cancel{V(x,y)(x^3 - x)} + \cancel{V(x,y)(x^3 - x)} = 0 \\ x^3 - x - V(x,y)y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - x = 0 \end{cases} \quad \cancel{(0,0)}, (\pm 1, 0) \quad [V(\pm 1, 0) = -\frac{1}{4}]$$

• Quando $V(x,y)=0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -y=0 \\ x^3-x=0 \end{cases}$$

$$(0,0), (\pm 1,0) [V(0,0)=0]$$



$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

SELLA

$$\lambda_{\pm} = \pm 1$$

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{loc}^u(0,0) \text{ è Tangente a } E^u = \text{Span}(v_+)$$

$$W_{loc}^s(0,0) \text{ " " " } E^s = \text{Span}(v_-)$$

$$JF(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} = \frac{3}{4} \quad \det = 2 + \frac{1}{8}$$

$$\text{tr}^2 - 4 \det < 0$$

FUOCHI INSTABILI

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = (x^3-x)(-y - V(x,y)(x^3-x)) +$$

$$+ y((x^3-x) - V(x,y)y)$$

$$\dot{V}(x,y) = -V(x,y) \underbrace{[(x^3-x)^2 + y^2]}_{\geq 0}$$

• $\exists c \neq 0$ $\{V(x,y)=c\}$ è invariante? $\{V(x,y)=0\}$ è inv.

$$\text{Se } x \in \dot{V}(x,y) \Big|_{\{V(x,y)=c\}} = 0 \Rightarrow \dot{V}(x,y) \Big|_{\{V(x,y)=c\}} = -c[(x^3-x)^2 + y^2] = 0 \text{ se } c=0$$

$$\{V(x,y)=0\} = \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 0 \right\} = \left\{ y = \pm \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2}} \right\}$$

$$\bullet (x^3 - x)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (+1,0), (-1,0)\}$$

$$V(\pm 1, 0) = -\frac{1}{4} \quad \nabla V(\pm 1, 0) = \underline{0}$$

$$H V(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H V(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\pm 1, 0)$ sono ^{punti di} minimi locali per $V(x,y)$.

$$\text{e in } B_\varepsilon(\pm 1, 0) \quad \dot{V}(x,y) = \underbrace{-V(x,y)}_{>0} \underbrace{[(x^3 - x)^2 + y^2]}_{\geq 0} > 0$$

$$\forall (x,y) \in B_\varepsilon(\pm 1, 0) \setminus \{(\pm 1, 0)\}$$

$$\bullet \dot{V}(x,y) = -V(x,y) [(x^3 - x)^2 + y^2]$$

$$\text{Se } (x,y) \notin \left\{ \bigcirc \bigcirc \right\} \text{ allora } \begin{matrix} V(x,y) > 0 \\ (x^3 - x)^2 + y^2 > 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x,y) < 0$$

Uso $V(x,y)$ come funzione limitante. Scelto $\varepsilon > 0$

$$\{V(x,y) \geq \varepsilon\} \text{ ho } \dot{V}(x,y) \leq -k, \quad k > 0.$$

Quindi se $D = \{V(x,y) \leq \varepsilon\}$, ho che $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus D \quad \exists t_0 > 0$
t.c. $\varphi(t_0, x_0) \in D$ allora $\varphi(t, x_0) \in D \quad \forall t \geq t_0$.

Allora (per la versione gen del Tes di Poincaré-Bendixon) ho
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{V(x,y) \geq 0\}$

$\omega(x_0)$ è ~~un punto fisso~~

~~un'orbita periodica~~

• unione di punti fissi e orbite periodiche

ed iterazione dei vettori

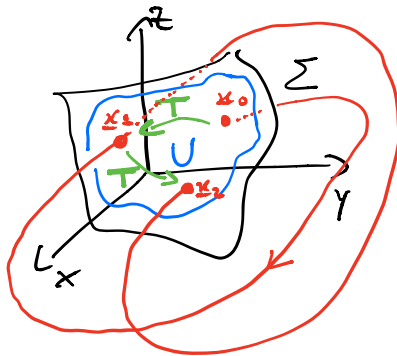
$$\omega(\underline{x}_0) = \{ \varphi(t, \underline{x}_0) = 0 \}$$



MAPPA DI POINCARÉ

$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^n, \quad \dim \Sigma = n-1$$



$$\underline{x}_1 = \varphi(\bar{t}, \underline{x}_0) \text{ per un certo } \bar{t}.$$

Se io so che $\exists U \subset \Sigma$ t.c. $\forall \underline{x} \in U \exists t(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

t.c. $\varphi(t(\underline{x}), \underline{x}) \in U$, posso costruire

$$T: U \rightarrow U, \quad T(\underline{x}) = \varphi(t(\underline{x}), \underline{x})$$

$$\underline{x}_0, \underline{x}_1 = T(\underline{x}_0), \underline{x}_2 = T(\underline{x}_1) = \underbrace{T^2(\underline{x}_0)}_{\text{Iterata}}, \dots, \underline{x}_n = \underbrace{T^n(\underline{x}_0)}_{\text{Iterata}}$$

$\{\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n, \dots\}$ è l'orbita di $\underline{x}_0$ per il sistema dinamico

discreto $T: U \rightarrow U$.

oss Se $\underline{x}_0$ è punto fisso di T , ossia $T(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$,

allora $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, \underline{x}_0)$ è orbita periodica.

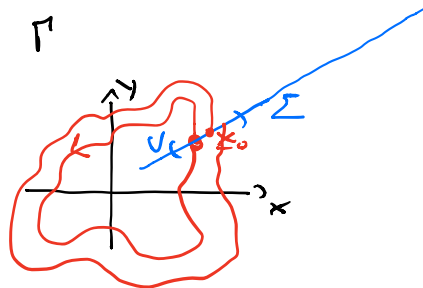
Mappe di Poincaré

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \Sigma \subset \mathbb{R}^n \quad \dim \Sigma = n-1 \quad \text{f.c.}$$

$\exists U \subset \Sigma$ per cui $\forall x \in U \exists \bar{t}(x)$ t.c. $\varphi(\bar{t}(x), x) \in U$
 $\Sigma =$ sezione locale, $T: U \rightarrow U, T(x) = \varphi(\bar{t}(x), x)$

1. Esiste un'orbita periodica Γ

$\Gamma = \mathcal{O}(x_0)$ di periodo τ



Se Σ è un segmento trasversale a Γ in x_0 , allora

$\exists U \subset \Sigma$ f.c. $\forall x \in U \exists \bar{t}(x) \sim \tau$ t.c. $\varphi(\bar{t}(x), x) \in \Sigma$
 $\bar{t}(x_0) = \tau$,

$$\Rightarrow T: U \rightarrow \Sigma \quad (\exists x \in U \text{ f.c. } T(x) \notin U)$$

Si dimostra che $\forall x \in U, T^n(x) \rightarrow x_0 \Rightarrow \Gamma$ è orbitalmente
 asintoticamente stabile.

2. Eq. diff. non-autonome con campi periodici

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F(x, \cdot) \text{ sia periodica di periodo } \tau$$

$$\text{es} \quad \ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma \cos(\omega t) \quad \delta, \omega_0, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\delta y - \omega_0^2 x + \gamma \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\underline{x} = (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

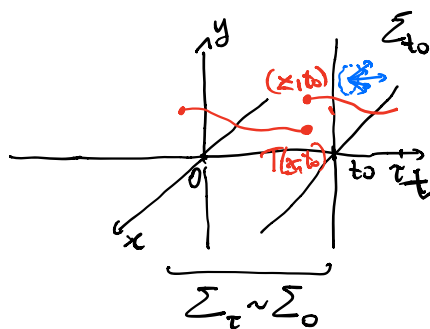
$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} F(\underline{x}, t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \dim \Sigma = n$$

$$\Sigma_{t_0} = \{(\underline{x}, t) / t = t_0\}$$

$$t_0 \in (0, \tau)$$

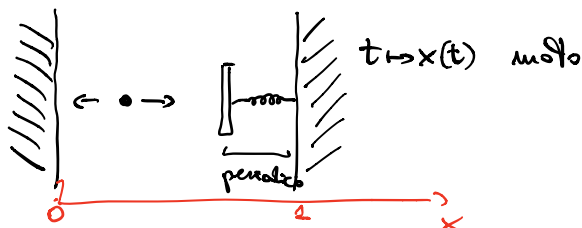


$$T: \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t_0}, (\underline{x}, t_0) \mapsto T(\underline{x}, t_0) = \varphi(\tau, (\underline{x}, t_0))$$

$\underline{x} = (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ per la τ -periodicit  di $F(\underline{x}, t)$
 si pu  ridurre a $\mathbb{R}^n \times S^1$, $S^1 = [0, \tau] / \sim$

ES

Ping-pong
(Fermi-Ulam)

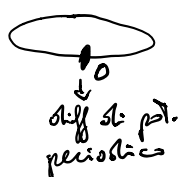


Mappe di Poincar  su $\Sigma = \{x=0\}$ e misuriamo
 (t, v) dove t   l'istante dell'urto con Σ e
 v   la velocit  di uscita da Σ .

$$T: S^1 \times \mathbb{R}^+ \hookrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+, t \in S^1, v \in \mathbb{R}^+$$

ES

Mappe Standard $T: S^1 \times \mathbb{R} \hookrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$



(t, E) t passaggio da 0
 E energia

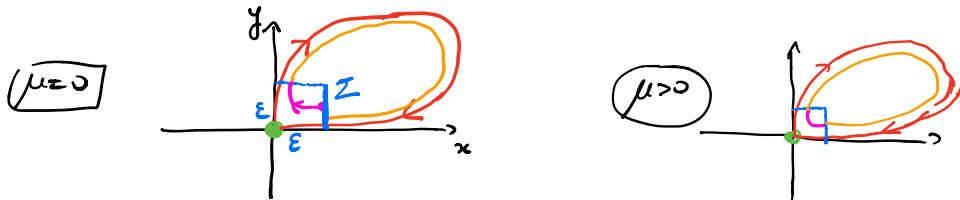
$$T(x, y) = \left(x + y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x), y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x) \right), k \in \mathbb{R}$$

Per ogni $k \neq 0$, esiste un insieme di misura di Lebesgue

positive di condizioni iniziali le cui orbite sono "caotiche".

3. Orbite omocline ed un punto fisso.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + f(x, y; \mu) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + g(x, y; \mu) \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \\ f, g = O(x^2 + y^2) \end{matrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

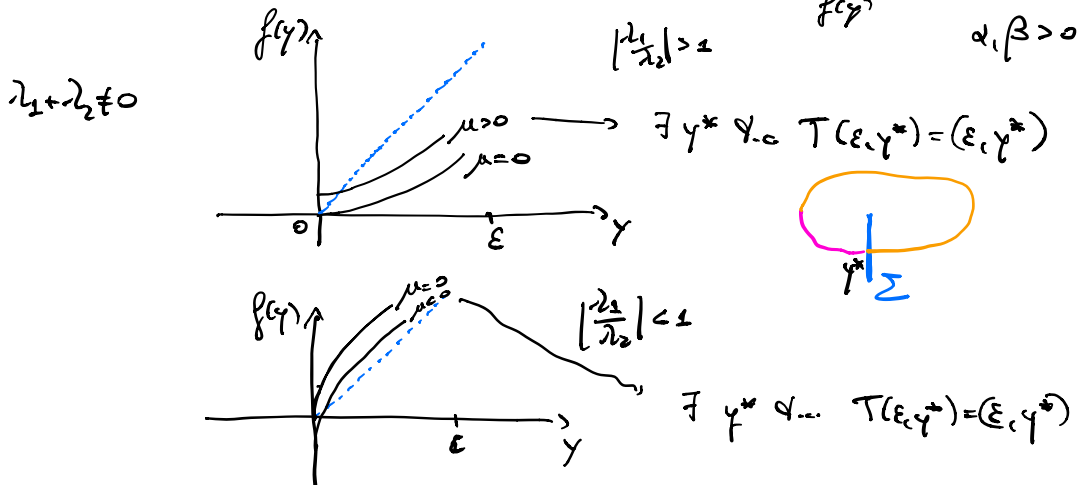


$$\Sigma = \{x = \varepsilon, 0 < y < \varepsilon\}$$

$$\exists U \subset \Sigma \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U \quad \exists T(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \varphi(T(x), \varepsilon) \in \Sigma.$$

$$T: U \rightarrow \Sigma, \quad T = T_1 \circ T_0$$

$$T(\varepsilon, y) = (\varepsilon, \underbrace{\alpha y^{|\lambda_1/\lambda_2|} + \beta \mu}_{f(y)}) \quad \alpha, \beta > 0$$

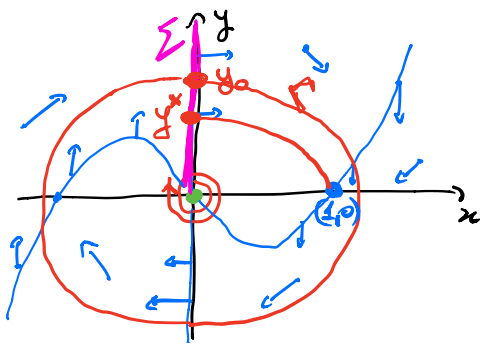


Equazione di Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 + x \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$\text{Punti fissi} = \{ (0,0) \}$$

$$JF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{tr}=1 \\ \text{det}=1 \end{matrix} \Rightarrow (0,0) \text{ è un fuoco instabile}$$



$$\bullet \text{ Isocline } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^3 - x - y}$$

$$\bullet \text{ Linee invarianti } \underline{y=0}$$

$$\bullet \text{ Orbite periodiche. Non-esistenza? } \frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 1 - 3x^2 \begin{cases} > 0 & |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ < 0 & |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Coordinate polari } \dot{\rho} = \rho \cos^2 \vartheta (1 - \rho^2 \cos^2 \vartheta)$$

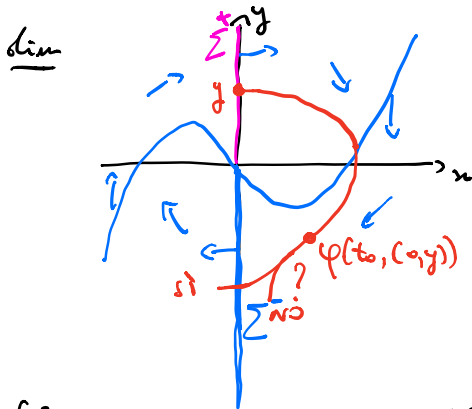
$$\bullet \text{ Simmetria. Se } (x(t), y(t)) \text{ è soluzione allora lo è anche } (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (-x(t), -y(t))$$

$$\bullet \text{ Segno del campo.}$$

$$\text{Mostriamo che } \exists \text{ orbite periodiche globalmente asintoticamente stabili} \\ \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ orbitalmente} \\ (\neq 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi(t, (x,y)), \Gamma) = 0)$$

$$\underline{\text{Prop}} \quad \Sigma^+ = \{ x=0, y>0 \} \text{ è sezione globale, ossia } \forall y>0$$

$\exists \bar{y} > 0$ v.c. $\varphi(\bar{y}, (0, y)) \in \Sigma^+$.



Basta mostrare che $\forall y > 0 \exists \bar{y}$

v.c. $\varphi(\bar{y}, (0, y)) \in \Sigma^-$

dove $\Sigma^- = \{x < 0, y < 0\}$.

Supponiamo che $\forall t$ abb. grande ho che

$x(t) \in (\varepsilon, \bar{x})$ con $\bar{x} > \varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 + x \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } y(t) - y(t_0) &= \int_{t_0}^t \dot{y}(s) ds = \\ &= \int_{t_0}^t [-x(s)] ds < -\varepsilon(t - t_0) \Rightarrow y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = \int_{t_0}^t [y(s) - x^2(s) + x(s)] ds$$

$$\Rightarrow \text{per } t \text{ abb. grande } x(t) - x(t_0) \leq (\varepsilon^2 - \bar{x})(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

ASSURDO.

Supponiamo $x(t) \rightarrow 0$ con $y(t) \rightarrow -\infty$, si ripete il ragionamento

□

$T: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$, mi basta studiare $T_0: \Sigma^+ \rightarrow \Sigma^-$ con

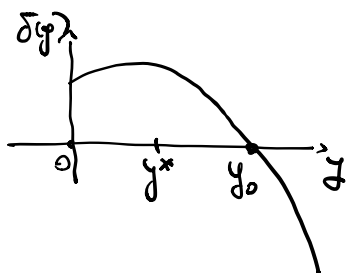
$$T_0(0, y) = \varphi(\bar{y}, (0, y)) \in \Sigma^-.$$

Prop. Sia $\delta: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta(y) = \frac{1}{2} (T_0^2 y - y^2)$.

(i) Si ha che $\exists y^* > 0$ v.c. $\delta(y) > 0$ su $(0, y^*)$;

(ii) $\delta(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} -\infty$

(iii) $\delta(y)$ è strettamente decrescente su $(y^*, +\infty)$.



Dato per buona la prop. su $\delta(y)$,

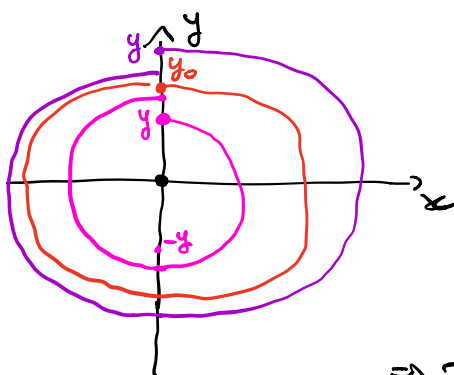
allora $\exists! y_0 > 0$ t.c. $\delta(y_0) = 0$

$$\Rightarrow T_0^2(y_0) = y_0^2 \Rightarrow T_0(y_0) = -y_0$$

Quindi per simm. $T(y_0) = y_0$

Se $y < y_0$, allora $\delta(y) > 0 \Leftrightarrow T_0^2(y) > y^2 \Rightarrow T_0(y) < -y$

e $T_0(y) > -y_0 \Rightarrow T(y) > y \Rightarrow \underbrace{T^n(y)}_{\substack{T_0 \dots T \\ n \text{ volte}}} \text{ è crescente}$



e $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y) = y_0$. Infatti sia $y_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y)$

e per continuità di T si ha

$$T(y_2) - y_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(y)) - y_2 = 0$$

$$\Rightarrow T(y_2) = y_2 \Rightarrow y_2 = y_0.$$

Analogamente per $y > y_0$.

□ esistenza di Γ e
orbit. asimpt. stabilità
globale

dim prop. $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e scelto $\xi \in \Sigma^+$ indichiamo

con $(x_\xi(t), y_\xi(t)) = \varphi(t, (0, \xi))$. Sia $\bar{t}(\xi) > 0$ t.c.

$(x_\xi(\bar{t}), y_\xi(\bar{t})) \in \Sigma^-$, e scriviamo

$$\delta(\xi) = \frac{1}{2}(T_0^2(\xi) - \xi^2) = V(x_\xi(\bar{t}), y_\xi(\bar{t})) - V(x_\xi(0), y_\xi(0)) =$$

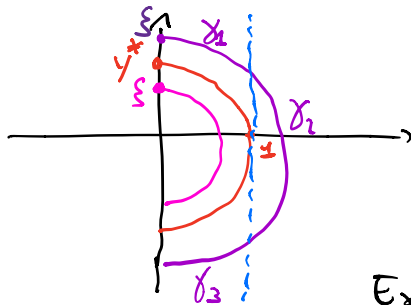
$$= \int_0^{\bar{t}} \frac{d}{dt} V(x_\xi(t), y_\xi(t)) dt = \int_0^{\bar{t}} \dot{V}(x_\xi(t), y_\xi(t)) dt =$$

$$= \int_0^{\bar{t}} x_\xi^2(t) (1 - x_\xi^2(t)) dt$$

$$\dot{V}(x,y) = x \dot{x} + y \dot{y} = x^2(1-x^2)$$

Se $y^* \in (0, +\infty)$ i t.c. $\exists \tau > 0$ t.c. $\varphi(\tau, 0, y^*) = (1, 0)$

Allora se $\xi < y^*$, si ha $x_\xi(t) \in (0, 1) \Rightarrow \delta(\xi) > 0$.



Per $\xi > y^*$, si ha $\bar{t}(\xi) > 0$ t.c.

$\varphi(\bar{t}(\xi), 0, \xi) \in \Sigma^-$ e indichiamo con $\gamma = \{(x_\xi(t), y_\xi(t)) / t \in [0, \bar{t}(\xi)]\}$.

Esistono $t_1, t_2 \in (0, \bar{t}(\xi))$ t.c.

$\forall t \in (0, t_1)$ si ha $x_\xi(t) \in (0, 1)$, $y_\xi(t) > 0$ $\left[\begin{smallmatrix} t_{\text{radio}} \\ x_1 \end{smallmatrix} \right]$

$\forall t \in (t_1, t_2)$ si ha $x_\xi(t) > 1$ $\left[\begin{smallmatrix} t_{\text{radio}} \\ x_2 \end{smallmatrix} \right]$

$\forall t \in (t_2, \bar{t}(\xi))$ si ha $x_\xi(t) \in (0, 1)$, $y_\xi(t) < 0$ $\left[\begin{smallmatrix} t_{\text{radio}} \\ x_3 \end{smallmatrix} \right]$

$$\delta(\xi) = \int_0^{t_1} x_\xi^2(t)(1-x_\xi^2(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} x_\xi^2(t)(1-x_\xi^2(t)) dt + \\ + \int_{t_2}^{\bar{t}(\xi)} x_\xi^2(t)(1-x_\xi^2(t)) dt.$$

Per $t \in (0, t_1)$ abbiamo $\dot{x}_\xi(t) > 0$ (perché $\xi > y^*$) quindi

esiste la funzione inversa di $t \mapsto x_\xi(t)$ che indichiamo

$\phi(\cdot) \ni x \mapsto t_\xi(x)$, e scriviamo

$$\int_0^{t_1} x_\xi^2(t)(1-x_\xi^2(t)) dt = \int_0^1 x^2(1-x^2) t_\xi'(x) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2(1-x^2) \frac{1}{\dot{x}_f(t) \Big|_{t=t_f(x)}} dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y(t_f(x)) - x^2 + x} dx$$

Per $\xi \nearrow +\infty$ si ha $y(t_f(\xi)) \nearrow +\infty$ (per come è fatto il campo) e quindi $\int_0^{t_1} x_f^2(t)(1-x_f^2(t)) dt$ è decrescente su $(y^*, +\infty)$

Lo stesso tipo di ragionamento si applica al termine

$\int_{t_2}^{\bar{t}(\xi)} x_f^2(t)(1-x_f^2(t)) dt$, che è quindi positivo e decrescente (attenzione che $x_f(t)$ è decrescente).

Per il termine $\int_{t_1}^{t_2} x_f^2(t)(1-x_f^2(t)) dt$ osserviamo che

$\dot{y}_f(t) < 0$, e quindi esiste un'inversa di $t \mapsto y_f(t)$, che

indichiamo con $(y_2, y_1) \ni y \mapsto t_f(y)$, dove

$y_1 = y_f(t_1)$ e $y_2 = y_f(t_2)$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x_f^2(t)(1-x_f^2(t)) dt &= \int_{y_2}^{y_1} \frac{x^2(t_f(y))(1-x^2(t_f(y)))}{-\dot{y}_f(t) \Big|_{t=t_f(y)}} dy = \\ &= \int_{y_2}^{y_1} x(y)(1-x^2(y)) dy < 0. \end{aligned}$$

Inoltre $x(y) \nearrow +\infty$ per $\xi \nearrow +\infty$, e quindi $x^2(y)(1-x^2(y)) \searrow -\infty$

Ne segue che

$$\int_{t_1}^{t_2} x_f^2(t)(1-x_f^2(t)) dt \searrow -\infty \quad \text{per } \xi \rightarrow +\infty.$$

□ prop.

Sistemi dinamici discreti

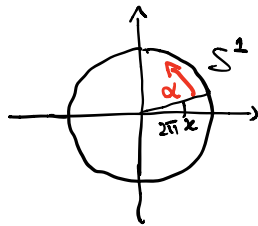
L'azione di $\mathbb{N}_0$ su X definita da $T: X \rightarrow X$

$$\mathbb{N}_0 \times X \ni (n, x) \mapsto T^n(x) \in X, \quad T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n\text{-volte}}$$

X loc. compatto, T continua

Esempi

- Rotazioni del cerchio (traslazioni)

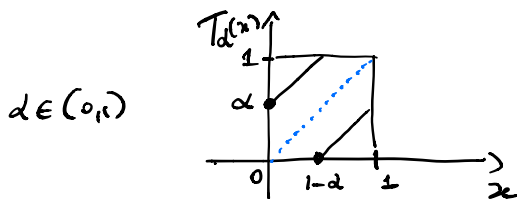


$$S^1 = \{ e^{2\pi i x} \mid x \in [0, 1) \}$$

$$e^{2\pi i x} \mapsto e^{2\pi i(x+\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[0, 1] \underset{\sim}{\text{on } 1} \ni x \mapsto x + \alpha \in [0, 1] \underset{\sim}{\text{on } 1} \quad \underline{\underline{\text{ISOMETRIA}}}$$

$$[0, 1) \ni x \xrightarrow{T_\alpha} x + \alpha \pmod{1} \in [0, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$



$$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in [0, 1) \quad , \quad T_\alpha^q(x) = x \quad (q \text{ PERIODO MINIMO})$$

$$x \xrightarrow{T_\alpha} x + \frac{p}{q} \pmod{1} \xrightarrow{T_\alpha} x + \frac{2p}{q} \pmod{1} \xrightarrow{T_\alpha} \dots \xrightarrow{T_\alpha} x + \frac{q \cdot p}{q} \pmod{1} = x + p \pmod{1}$$

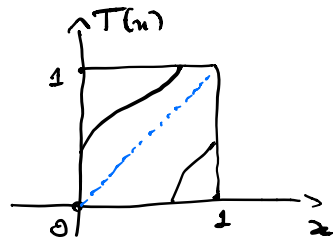
$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall x \in [0, 1) \quad \nexists n \text{ t.c. } T_\alpha^n(x) = x$$

$$\forall x \in [0,1) \quad \mathcal{O}(x) \text{ is dense in } (0,1) \quad \left[\begin{array}{l} \forall x \in [0,1) \quad \forall y \neq x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \text{ s.t.} \\ d(T^n x, y) < \varepsilon \end{array} \right]$$

Domanda $\{n\alpha\} \in (0, \frac{1}{2})$? $\alpha \in \mathbb{Q}$ FACILE
 $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ RICHIEDE CONOSCENZA DI α

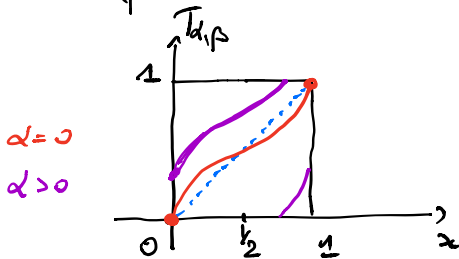
- Omeomorfismi del cerchio

$$T: S^1 = \mathbb{C}^1 / \sim \rightarrow \mathbb{C}^1 / \sim$$



Exempis : $T_{\alpha, \beta}(x) = x + \alpha + \frac{\beta}{2\pi} \sin(2\pi x)$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$

$$T'_{d/\beta}(x) = 1 + \beta \cos(2\pi x) > 0 \quad \forall x$$



$$x + \frac{\beta}{2\pi} \sin(2\pi x) = x$$

$$\sin(2\pi x) = 0$$

$$x = 0, \frac{1}{2}, 1$$

$$\underline{\beta \geq 0} \quad m \{ \alpha \in (0,1) : \exists x \text{ periodic} \} = m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

$$\underline{\beta > 0} \quad " \quad > 0$$

$$\tau: X \rightarrow X$$

Def. Orbita di un punto $x \in X$ è l'insieme

$$\mathcal{O}(x) := \{T^n(x) \mid n \geq 0\}$$

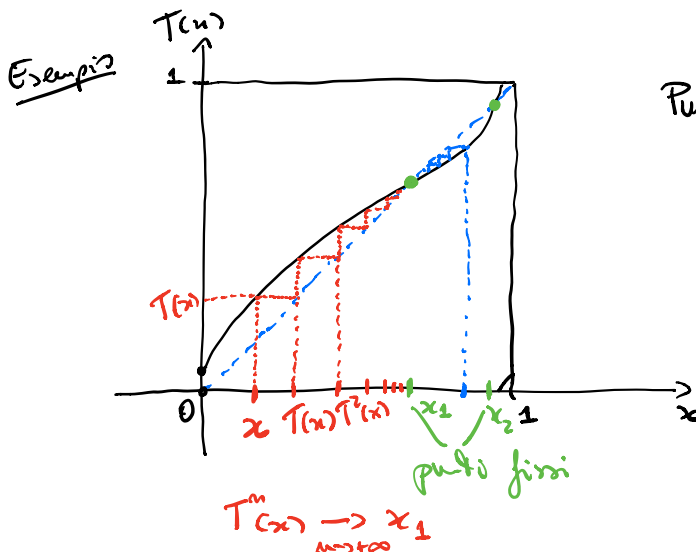
Def. • Un punto $x \in X$ si dice FISSO se $T(x) = x$
e in questo caso $\mathcal{O}(x) = \{x\}$.

• Un punto $x \in X$ si dice PERIODICO di PERIODO MINIMO $p \in \mathbb{N}$ se $T^p(x) = x$ e $T^k(x) \neq x$
 $\forall k = 0, \dots, p-1$

• Un punto $x \in X$ si dice DEFINITIVAMENTE PERIODICO se $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $T^k(x)$ è periodico e $T^i(x)$ non è periodico $\forall i = 0, \dots, k-1$.

(è possibile ^{con $k \geq 1$} solo se T non è invertibile)

• Se x è periodico di periodo minimo $p \in \mathbb{N}$,
la sua orbita è $\mathcal{O}(x) = \{x, T(x), T^2(x), \dots, T^{p-1}(x)\}$
e si chiama orbita periodica.



Prop Sia $x \in (0, x_1)$ allora $T^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1$.

dim $\forall n \geq 1, T^n(x) > T^{n-1}(x)$.

• $n=1$ $T(x) > x$ (grafico di T è sopra la $10.$)
 $x_1 (x_1, x_2)$

• in qualsiasi $T^n(x) = T(\underbrace{T^{n-1}(x)}_y) > \underbrace{T^{n-1}(x)}_y$

$\{T^n(x)\}_{n \geq 1}$ è monotona strettamente crescente ed
 è in $(0, x_2)$.

Sia $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x)$, allora

$$T(\bar{x}) - \bar{x} = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x)) - \bar{x} \stackrel{T \text{ cont}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{n+1}(x) - \bar{x}$$

$$= \bar{x} - \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} \text{ è punto fisso}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x_1.$$

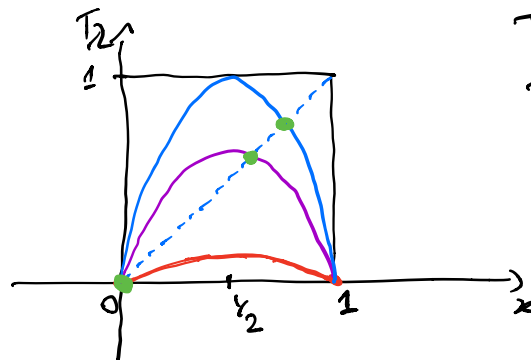
□

• Famiglia logistica $\lambda \in (0, 4]$

$$T_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad T_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

$$T'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x$$

$$T'_\lambda(0) = \lambda$$



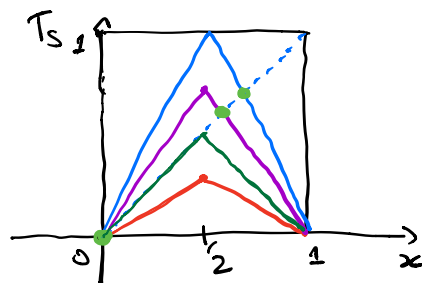
$$\lambda \in (0, 1]$$

$$\lambda \in (1, 4)$$

$$\lambda = 4$$

• Mappe Tenda $s \in (0, 2]$

$$T_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad T_s(x) = \begin{cases} sx & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ s(1-x) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$S \in (0, 1) \quad S=1$$

$$S \in (1, 2)$$

$$S=2$$

Def. Dati due sistemi dinamici discreti (X, T) e $(\tilde{X}, \tilde{T})$, si dice che sono **CONIUGATI TOPOLOGICAMENTE** se T e $\tilde{T}$ sono continue e $\exists \varphi: X \rightarrow \tilde{X}$ omeomorfismo tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \varphi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \varphi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{T}} & \tilde{X} \end{array}$$

il diagramma commuta.

$$\varphi \circ T = \tilde{T} \circ \varphi$$

Esempio T_λ con $\lambda=4$ è coniugato topologicamente a T_s con $s=2$ da $\varphi(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$$T_\lambda \circ \varphi = \varphi \circ T_s \quad \begin{array}{l} \lambda=4 \\ s=2 \end{array}$$

$$T: X \rightarrow X$$

Def. Un insieme $A \subset X$ si dice **POSITIVAMENTE INVARIANTE** se $T(A) \subset A$ ($\Leftrightarrow \forall x \in A \quad T(x) \in A$)

Un insieme $A \subset X$ si dice **TOTALMENTE INVARIANTE** se $T(A) = A$.

(Un insieme $A \subset X$ si dice **FORTEMENTE INVARIANTE** se $T^{-1}(A) = A$
(dove $T^{-1}(A) = \{x \in X : T(x) \in A\}$)

oss Se T è invertibile, A è fort. inv. $\Leftrightarrow A$ è fort. invariante.

Def. Dato un $x \in X$, si dice **OMEGA-LIMITE** di x l'insieme

$$\omega(x) := \{y \in X : \exists m_k \nearrow +\infty \text{ t.c. } T^{m_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y\}$$

oss Se T è invertibile si definisca anche $\alpha(x)$

Prop. Sia $x \in X$ con (m_k) limitata. Allora $\omega(x)$ è non-vuoto e compatto. Se T è continua allora $\omega(x)$ è totalmente invariante.

dim. $x \in X$ e $y \in \omega(x)$. Allora $T(y) \in \omega(x)$.

Sia $m_k \nearrow +\infty$ t.c. $T^{m_k}(x) \rightarrow y$, allora

$$T(y) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} T^{m_k}(x)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{m_k+1}(x)$$

$$\Rightarrow \exists \hat{m}_k = m_k + 1 \nearrow +\infty \text{ t.c. } T^{\hat{m}_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T(y).$$

• $x \in X$ e $y \in \omega(x)$. Allora $\exists z \in \omega(x)$ t.c. $T(z)=y$.

Supp. che $T^{n_k}(x) \rightarrow y$, poiché $n_k \rightarrow +\infty$ possiamo definire $\{n_k-1\}_{k \rightarrow +\infty}$ e consideriamo $\{T^{n_k-1}(x)\}_k$.

Basta osservare che $\{T^{n_k-1}(x)\}$ è limitata essendo contenuta in $\mathcal{O}(x)$, e quindi $\exists k_j \rightarrow +\infty$ t.c. $T^{n_{k_j}-1}(x)$ converge per $j \rightarrow +\infty$ a $z \in X$.

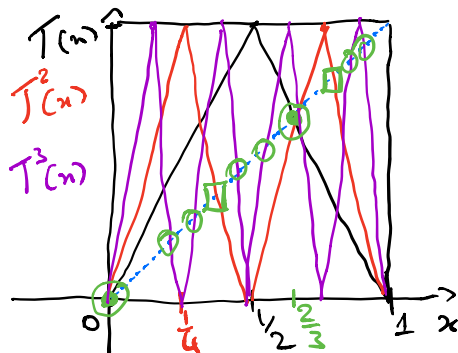
$\Rightarrow z \in \omega(x)$ e inoltre

$$T(z) = T\left(\lim_{j \rightarrow +\infty} T^{n_{k_j}-1}(x)\right) = \lim_{j \rightarrow +\infty} T^{n_{k_j}}(x) = y$$

$\Rightarrow T(z)=y$. □



Orbite periodiche x è periodico di periodo minimo p se $T^p(x)=x$, e $\forall k=1, \dots, p-1$ $T^k(x) \neq x$



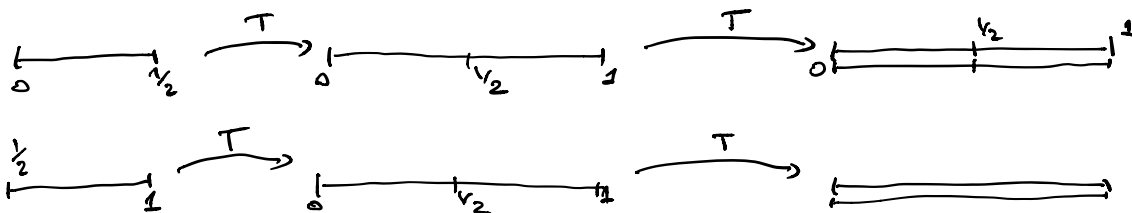
Orbite di periodo 2 =

$$= \underbrace{\left\{ \{0\}, \left\{\frac{2}{3}\right\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\} \right\}}_{\text{punti fissi}}$$

Orbite di periodo 3 =

$$= \left\{ \{0\}, \left\{\frac{2}{3}\right\}, \{y_1, y_2, y_3\}, \{z_1, z_2, z_3\} \right\}$$

Punti fissi di $T^2(x) = T(T(x)) = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \right\}$



Se $x \in [0, 1/4]$ allora $T(x) \in [0, 1/2]$ e quindi

$$T^2(n) \underset{x \in [0, \frac{1}{2}]}{\overset{\uparrow}{=}} T(2x) \underset{2x \in [0, \frac{1}{2}]}{\overset{\uparrow}{=}} 4x \quad \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

Se $x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ allora $T(n) \in [\frac{1}{2}, 1]$ e quindi

$$T^2(n) \underset{x \in [0, \frac{1}{2}]}{\overset{\uparrow}{=}} T(2n) \underset{2x \in [\frac{1}{2}, 1]}{\overset{\uparrow}{=}} 2(1-2x) = 2-4x$$

Se $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ allora $T(n) \in [\frac{1}{2}, 1]$ e quindi

$$T^2(n) = T(2(1-x)) = 2(1-2(1-x)) = 2(2x-1)$$

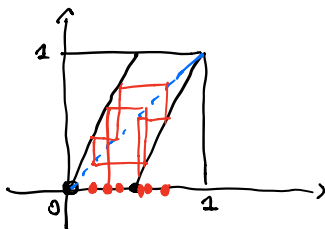
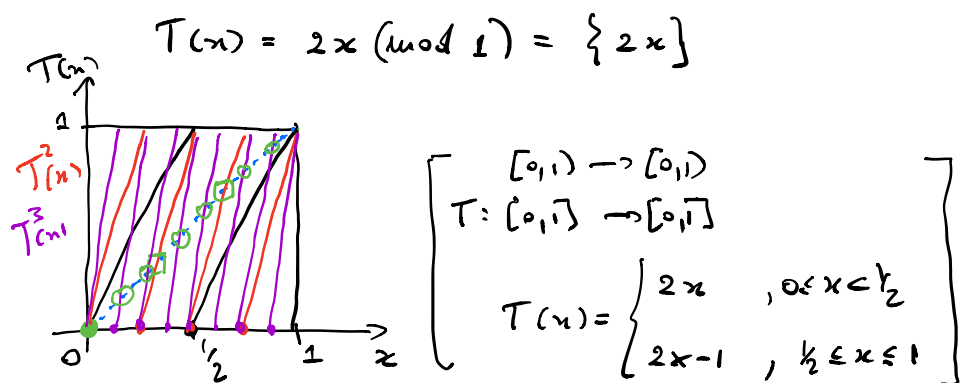
Se $x \in [\frac{3}{4}, 1]$ allora $T(n) \in [0, \frac{1}{2}]$ e quindi

$$T^2(n) = T(2(1-x)) = 4(1-x)$$

$$\bar{x}_1 \text{ verifica } T^2(\bar{x}_1) = \bar{x}_1 \Leftrightarrow 2-4\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{2}{5}$$

$$\bar{x}_2 = T(\bar{x}_1) = \frac{4}{5} \quad [4(1-\bar{x}_1) = \bar{x}_2]$$

Mappe di Bernoulli $T: S^1 \rightarrow S^1$, $S^1 = [0, 1]_{\text{mod } 1}$



oss Per le rotazioni $T_\alpha: x \mapsto x + \alpha \pmod{1} = \{x + \alpha\}$

- se $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\omega(x) = \mathcal{O}(x) =$ orbite periodiche
- se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\omega(x) = S^1$.

Sia $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) \mid \omega_i \in \{0, 1\}\}$

e sia $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ definita da

$$\begin{aligned} (\varphi(x))_i &= 0 & \text{se } T^i(x) \in [0, \frac{1}{2}) \\ &= 1 & \text{se } T^i(x) \in [\frac{1}{2}, 1) \end{aligned}$$

$$x \xrightarrow{\varphi} \omega = \varphi(x) = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots)$$

$$T(x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(T(x)) = (\omega_1 \omega_2 \dots) =: \sigma(\omega)$$

$$\sigma: \Omega \rightarrow \Omega \quad \text{SHIFT}$$

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1] \\ \varphi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \varphi \\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \end{array} \quad \varphi \circ T = \sigma \circ \varphi$$

x è periodico per $T \iff \varphi(x)$ è periodico per σ .

Orbite periodiche di $\sigma = \{(\overline{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{p-1}}) : \omega_0 \dots \omega_{p-1} \in \underbrace{\{0, 1\}^*}_{\text{parole finite}}\}$

x è definitivamente periodico per $T \iff \varphi(x)$ è definitivamente periodico per σ

$\iff \exists k \geq 1$ t.c. $\sigma^k(\varphi(x))$ è periodico

$$\varphi(x) = (\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{k-1} \overline{\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_1 \dots \tilde{\omega}_{p-1}})$$

Prop. $\varphi(x) = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) \iff x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k 2^{-k-1}$

$$\underline{\text{def}} \quad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k 2^{-k-1} \quad \text{con } \omega_k \in \{0,1\}$$

$$T(x) = \{2x\} \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k 2^{-k} & \omega_0 = 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k 2^{-k} & \omega_0 = 1 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$$x \in [0, \frac{1}{2}) \quad x = \frac{\omega_1}{4} + \frac{\omega_2}{8} + \dots \xrightarrow{T} \{2x\} = \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{4} + \dots$$

$$x \in [\frac{1}{2}, 1) \quad x = \frac{\omega_0}{2} + \frac{\omega_1}{4} + \dots \xrightarrow{T} \{2x\} = \left\{ \omega_0 + \frac{\omega_1}{2} + \dots \right\}$$

$$= \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{4} + \dots$$

oss

$$x \text{ è RAZIONALE DIADICO} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k 2^{-k-1} \text{ con}$$

$$\omega_k = 0 \quad \forall k \geq N.$$

$$\text{Allora } \varphi(n) = (\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{N-1} \bar{0}) \text{ e quindi}$$

$$\sigma^N(\varphi(n)) = (\bar{0})$$

$$\text{Se } x \text{ è razionale diadico } x = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k 2^{-k-1}, \text{ allora}$$

$$x = \sum_{k=0}^{N-2} \omega_k 2^{-k-1} + \underbrace{\sum_{k=N}^{+\infty} 2^{-k-1}}_{= 2^{-N}}, \text{ allora}$$

$$(\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{N-2} 0 \bar{1}) \text{ dovrebbe corrispondere a } x.$$

$$\text{Quindi } (\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{N-2} 0 \bar{1}) \notin \varphi([0,1]_{\text{bi}})$$

Prop. Dato ogni $x \in [0,1]$ è normale (ossia se $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_k 2^{-k-1}$)
 si ha che $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{\omega_k = 0 / k < 0, \dots, N-1\}}{N} = \frac{1}{2}$, e

la stessa cosa vale per ogni perla finita, ossia

$$\text{dato } \tilde{\omega}_0 \dots \tilde{\omega}_{p-1} \in \{0,1\}^p \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\#\{\omega_{k+i} = \tilde{\omega}_i \quad \forall i=0, \dots, p-1 / k=0, \dots, N-1\}}{N} = 2^{-p}$$

Corollario Per quasi ogni $x \in [0,1]$ si ha $\omega(x) = [0,1]$.
 OMEGA
 LIMITE

ESEMPIO Per l'espansione decimale di $x \in [0,1]$, un

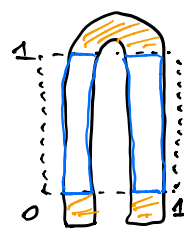
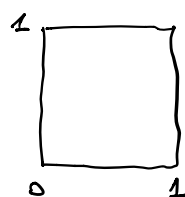
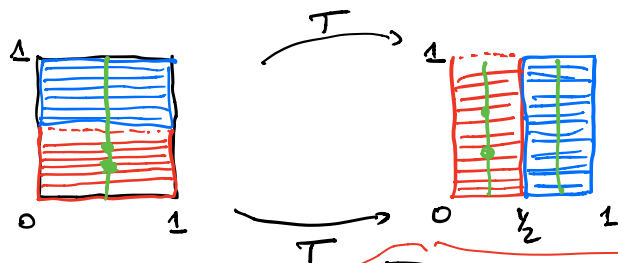
$$T: S^1 \rightarrow S^1, \quad S^1 = [0,1] / \sim, \quad T(x) = 10x \pmod{1} \\ = \{10x\}$$

Esempi

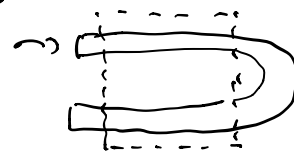
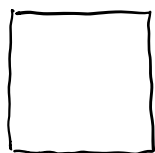
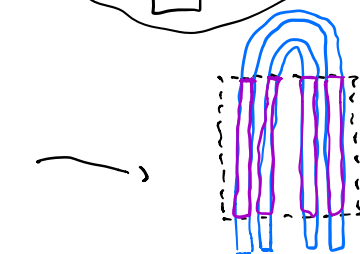
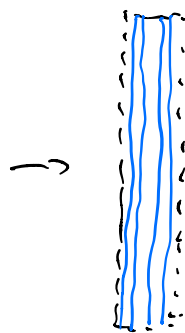
Mappe del panettiere

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

$$T(x,y) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x, 2y), & \text{se } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, 2y-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

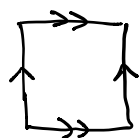


Mappe del ferro
di cavallo



Esempio Automorfismi del Toro

$$\mathbb{T}^2 = [0,1] \times [0,1] / \sim$$

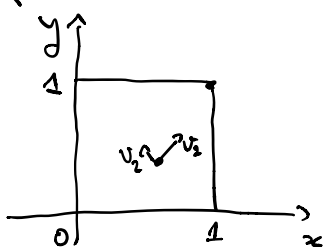


$$A \in SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

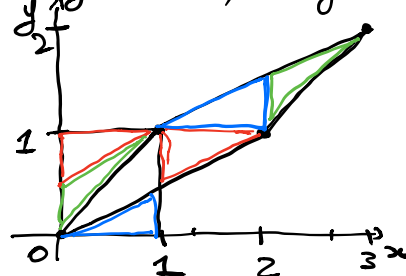
$$T: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \quad T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x, y) = (2x + y \pmod{1}, x + y \pmod{1})$$



$\xrightarrow{T}$



$$A \text{ ha come autovalori } \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1 \\ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \in (0,1) \end{cases}$$

con autovettori $v_{1,2}$

A è la mappa del gatto di Arnold



Esempio $A = \{1, \dots, N\} \quad \Omega = A^{\mathbb{Z}} \text{ (opp. } A^{\mathbb{N}})$

$$\Omega = \left\{ \omega = (\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \cdot \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) / \omega_i \in A \quad \forall i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Con la topologia prodotto Ω è $\propto$ compatto,

la topologia prodotto è indotta dalla metrica

$$d(\omega, \tilde{\omega}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\delta(\omega_i, \tilde{\omega}_i)}{2^{|i|}} \quad \text{dove}$$

$$\delta(\omega_i, \tilde{\omega}_i) = \begin{cases} 0 & , \omega_i = \tilde{\omega}_i \\ 1 & , \omega_i \neq \tilde{\omega}_i \end{cases}$$

"Fissato $\varepsilon > 0 \exists k(\varepsilon)$ t.c.

$$d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon \iff \omega_i = \tilde{\omega}_i \quad \forall i = -k(\varepsilon), \dots, 0, \dots, k(\varepsilon)$$

Cilindri $C(\omega, k, m)$ con $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$

$$C(\omega, k, m) = \left\{ \tilde{\omega} \in \Omega \mid \tilde{\omega}_{k+i} = \omega_{k+i} \quad \forall i = 0, \dots, m-1 \right\}$$

$$\begin{aligned} \omega &= (\dots \overbrace{\omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_{k+m-1}} \dots) \\ \tilde{\omega} &= (\dots \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_{k+m-1} \dots) \end{aligned}$$

σ SHIFT $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$

$$\omega = (\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \cdot \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) \mapsto \sigma \omega = (\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \cdot \omega_1 \omega_2 \dots)$$

$$(\sigma \omega)_i = \omega_{i+1}$$

Prop. • σ è continua e invertibile;

- σ ha una cardinalità numerabile di orbite periodiche ($\omega = (\overline{\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{p-1}})$)
- σ ha un'orbita densa

$$\left(\omega \text{ ha orbita densa} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \tilde{\omega} \in \Omega \quad \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } d(\tilde{\omega}, \sigma^n(\omega)) < \varepsilon \right)$$

Quindi se ω contiene tutte le possibili parole finite

allora le orbite dense.

- σ ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ossia $\exists c > 0$ t.c. $\forall \omega \in \Omega$ e $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\omega} \in \Omega$ e $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.c. $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon$ e $d(\sigma^n \omega, \sigma^n \tilde{\omega}) > c$.

Skim Se $c = \frac{1}{2}$, $d(\sigma^n \omega, \sigma^n \tilde{\omega}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\delta((\sigma^n \omega)_i, (\sigma^n \tilde{\omega})_i)}{2^{|i|}}$

e $(\sigma^n \omega)_0 \neq (\sigma^n \tilde{\omega})_0$

Scelgo ω e fisso $\varepsilon > 0$ e piccolo, ho che $\exists k(\varepsilon)$ t.c. $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon \Rightarrow \tilde{\omega}_i = \omega_i \forall i = -k(\varepsilon), \dots, k(\varepsilon)$

$$\omega = (\dots \omega_{-k(\varepsilon)} \omega_{-k(\varepsilon)+1} \dots \omega_0 \omega_1 \dots \omega_{k(\varepsilon)} \omega_{k(\varepsilon)+1} \dots)$$

$$\tilde{\omega} = (\dots \omega_{-k(\varepsilon)} \omega_{-k(\varepsilon)+1} \dots \omega_0 \omega_1 \dots \omega_{k(\varepsilon)} \dots \tilde{\omega}_{k(\varepsilon)+1} \dots)$$

$$\sigma^n \omega = (\dots \omega_{-k(\varepsilon)} \dots \omega_{k(\varepsilon)} \dots \omega_n \omega_{n+1} \dots)$$

$$\sigma^n \tilde{\omega} = (\dots \omega_{-k(\varepsilon)} \dots \omega_{k(\varepsilon)} \dots \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_{n+1} \dots)$$

$$d(\sigma^n \omega, \sigma^n \tilde{\omega}) \geq \delta(\omega_n, \tilde{\omega}_n) = 1 > \frac{1}{2} \quad \square$$

SISTEMI DINAMICI DISCRETI IN 1D

$T: X \rightarrow X$ con $X = [a, b], \mathbb{R}, S^1$
e $T \in C^1$.

Def. Un punto fisso $x_0 \in X$ è ATTRATTIVO se

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha che
 $T^n(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \forall n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x) = x_0$

Un punto fisso $x_0 \in X$ è **REPULSIVO** se
 $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists n(x) \geq 1$ t.c.
 $T^{n(x)}(x) \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema. Sia $x_0 \in X$ punto fisso. Se $|T'(x_0)| < 1$ allora
 x_0 è attrattivo, se $|T'(x_0)| > 1$ allora x_0 è
 repulsivo.

dim • $|T'(x_0)| < 1$ Fissato $c \in (0, 1)$ e poniamo
 $\delta > 0$ t.c. $|T'(x)| \leq c \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 Se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$|T(x) - x_0| = |T(x) - T(x_0)| = \underbrace{|T'(\xi)|}_{\xi \in (x, x_0)} |x - x_0| \leq c \delta < \delta$$

$$|T'(\xi)| \leq c$$

$$\Rightarrow T(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$|T^2(x) - x_0| = |T^2(x) - T(x_0)| = |T(T(x)) - T(x_0)| =$$

$$= \underbrace{|T'(\eta)|}_{\eta \in (x_0, T(x))} |T(x) - x_0| \leq c |T(x) - x_0| \leq$$

$$\leq c^2 |x - x_0| < c^2 \delta$$

$$|T'(\eta)| \leq c$$

Allora per ogni $n \geq 1$ si ha $T^n(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
 e $|T^n(x) - x_0| \leq c^n \delta \Rightarrow T^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$.

$$\begin{aligned}
 & \cdot T'(x_0) > 1, \text{ scegli } c > 1 \text{ e } \delta > 0 \text{ t.c.} \\
 & T'(x) \geq c \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \text{ Allora } x \in T^n(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \forall n \\
 & |T^n(x) - x_0| = \underbrace{|T'(z)|}_{\substack{z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ T'(z) \geq c}} |T^{n-1}(x) - x_0| \geq \\
 & \geq \dots \geq c^n |x - x_0|
 \end{aligned}$$

$$\text{Assunto } \delta > |T^n(x) - x_0| \geq c^n |x - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

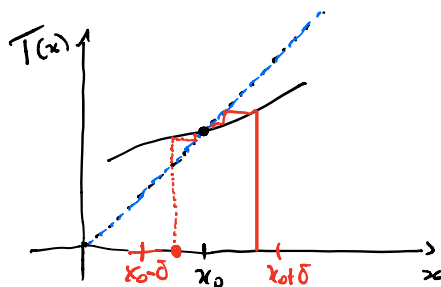
$$\begin{aligned}
 & \cdot T'(x_0) < -1, \text{ scegli } c < -1 \text{ e } \delta > 0 \text{ t.c.} \\
 & T'(x) < c \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \text{ Come prima.}
 \end{aligned}$$

□

$$T: X \rightarrow X, \quad X = [a, b], \mathbb{R}, S^1, \quad T \in C^1$$

$x_0 \in X$ punto fisso

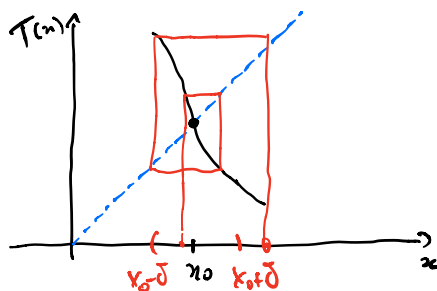
Def. Un punto fisso x_0 si dice **IPERBOLICO** se $|T'(x_0)| \neq 1$.



$$|T'(x_0)| < 1$$

$$\Rightarrow |T^n(x) - x_0| \leq C^n |x - x_0|$$

$$C \in (0, 1)$$



$$\text{Se } T^k(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

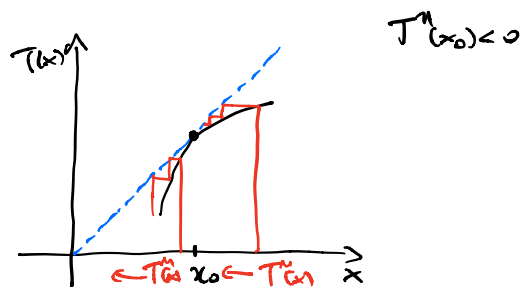
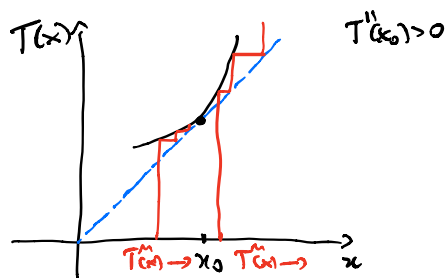
$$\forall k = 0, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow |T^n(x) - x_0| \geq C^n |x - x_0|$$

$$C > 1$$

Prop Supponiamo che $T \in C^3$. Sia x_0 un punto fisso con $|T'(x_0)| \neq 1$, allora:

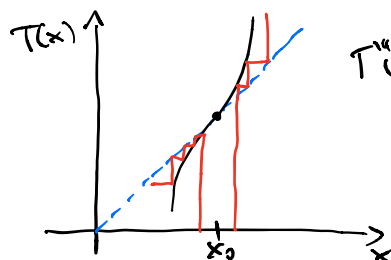
(i) $T'(x_0) = 1$. Se $T''(x_0) \neq 0$ allora x_0 è semi-streduro.



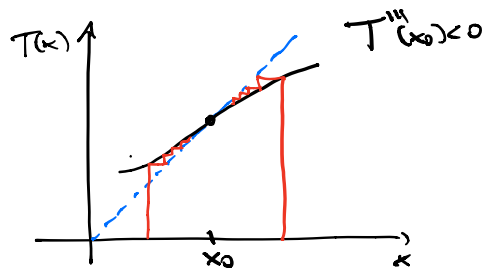
(ii) $T'(x_0) = 1$ e $T''(x_0) = 0$. Allora

$T'''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è repulsivo

$T'''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è attrattivo

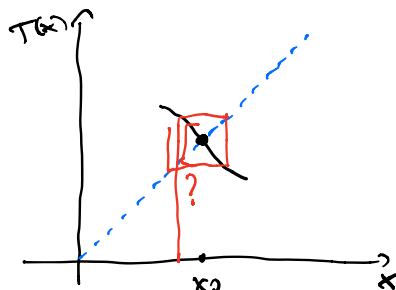


$T'''(x_0) > 0$



$T'''(x_0) < 0$

(iii) $T'(x_0) = -1$. Sia $\delta T(x) := \frac{T''(x)}{T'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{T''(x)}{T'(x)} \right)^2$ la



derivata Schwarziana, e

$\delta T(x_0) < 0$ allora x_0 è attrattivo

$\delta T(x_0) > 0$ " x_0 è repulsivo

dim $Q(x) = T^2(x)$. x_0 è punto fisso di Q e

$$Q'(x_0) = 1 \quad [Q'(x) = T'(T(x)) T'(x)]$$

$$Q''(x_0) = 0 \quad [Q''(x) = T''(T(x)) (T'(x))^2 + T'(T(x)) T''(x)]$$

$$Q'''(x_0) = 2 \delta T(x_0).$$

□

• Leyak CAP 9-12.

Stabilità per orbite periodiche

x_0 è punto periodico di periodo minimo $p \geq 1 \Leftrightarrow$

x_0 è punto fisso di T^p ($T^p(x_0) = x_0$) e $T^k(x_0) \neq x_0 \forall k=1, \dots, p-1$

Def Sire x_0 un punto periodico di periodo minimo p . Si dice che l'orbita di x_0 è *attrattiva* se x_0 è punto fisso attrattivo per T^p . Si dice che l'orbita di x_0 è *repulsiva* se x_0 è punto fisso repulsivo per T^p .

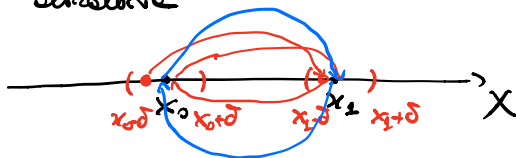
Oss $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, T(x_0), \dots, T^{p-1}(x_0)\}$ è orbita periodica
 $x_0, x_1, \dots, x_{p-1}$
 allora x_i è punto fisso di $T^p \quad \forall i=0, \dots, p-1$.

$$(T^p)'(x_0) = T'(T^{p-1}(x_0)) \cdot T'(T^{p-2}(x_0)) \cdot \dots \cdot T'(T(x_0)) \cdot T'(x_0)$$

$$= \prod_{i=0}^{p-1} T'(x_i)$$

$$\Rightarrow (T^p)'(x_i) = (T^p)'(x_j) \quad \forall i, j=0, \dots, p-1.$$

Oss Se $\{x_0, x_1\}$ è un'orbita periodica di periodo minimo 2, se è attrattiva



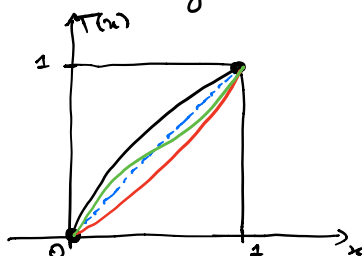
$$(T^2)^n(x) \rightarrow x_0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$(T^2)^n(y) \rightarrow x_1 \quad \forall y \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$$

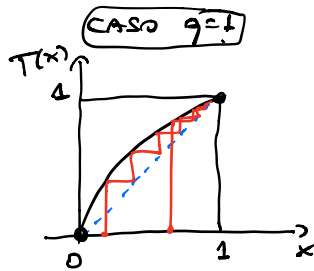


Esempi

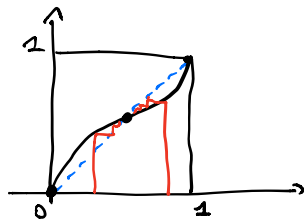
1. Omeomorfismi del cerchio $T: S^1 \rightarrow S^1$, $S^1 = [0,1]_{\text{ovr}}$



Se esiste un'orbita periodica di periodo minimo q allora ogni altra orbita periodica ha periodo minimo q .

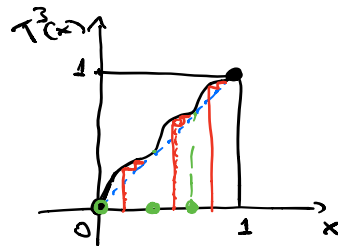


$T^n(x) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$ $\exists$ orbite periodiche di periodo minimo $q > 1$.

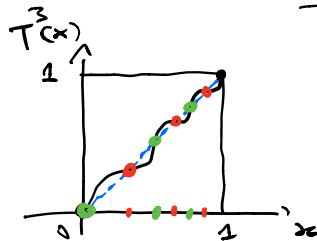


$T^n(x) \rightarrow \{\text{punto fisso}\} \Rightarrow$ "

CASO $q=3$



Un'unica orbita di periodo minimo 3.
È attrattiva.



Due orbite periodiche di periodo minimo 3.

L'orbita rossa è attrattiva

" verde è repulsiva.

2. Mappa Tentst $S=2$.

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2(1-x), & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

T ha orbite periodiche di periodo minimo $p \quad \forall p \geq 1$.

$$T(1/2) = 1, \quad T(1) = 0 \quad \mathcal{O}(1/2) = \{1/2, 1, 0\}$$

Sia $\{x_0, \dots, x_{p-1}\}$ orbite periodiche

$$|(TP)'(x_0)| = \prod_{i=0}^{p-1} |T'(x_i)| = 2^p > 1 \quad \forall p \geq 1$$

$\Rightarrow$ tutte le orbite periodiche sono repulsive.

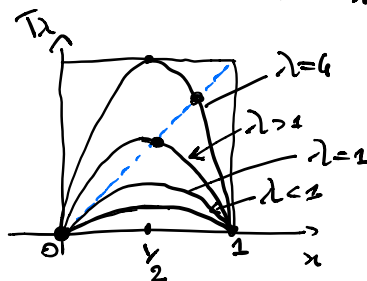
3. Famiglia logistica $T_\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$

$$T_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad \lambda \in (0,4].$$

Punti fissi.

$$\lambda x(1-x) = x \quad \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{\lambda-1}{\lambda} \text{ per } \lambda \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Punti fissi} = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } \lambda \in (0,1] \\ \{0, \frac{\lambda-1}{\lambda}\}, & \text{se } \lambda \in [1,4] \end{cases}$$



$$T'_\lambda(x) = \lambda(1-2x) \quad T'_\lambda(0) = \lambda \quad \begin{cases} > 1, & \text{se } \lambda > 1 \\ < 1, & \text{se } \lambda < 1 \\ = 1, & \text{se } \lambda = 1 \end{cases}$$

$\{0\}$ è
 attrattivo se $\lambda \in (0,1]$
 repulsivo se $\lambda \in (1,4]$

$$T''_\lambda(x) = -2\lambda < 0 \quad \forall x, \quad \forall \lambda \in (0,4]$$

$$\textcircled{\lambda > 1} \quad T'_\lambda\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lambda\left(1-2\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = \lambda - 2\lambda + 2 = 2 - \lambda$$

$$|T'_\lambda\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)| \quad \begin{cases} < 1 & \Leftrightarrow \lambda \in (1,3) \\ > 1 & \Leftrightarrow \lambda \in (3,4] \\ = 1 & \Leftrightarrow \lambda = 3 \end{cases}$$

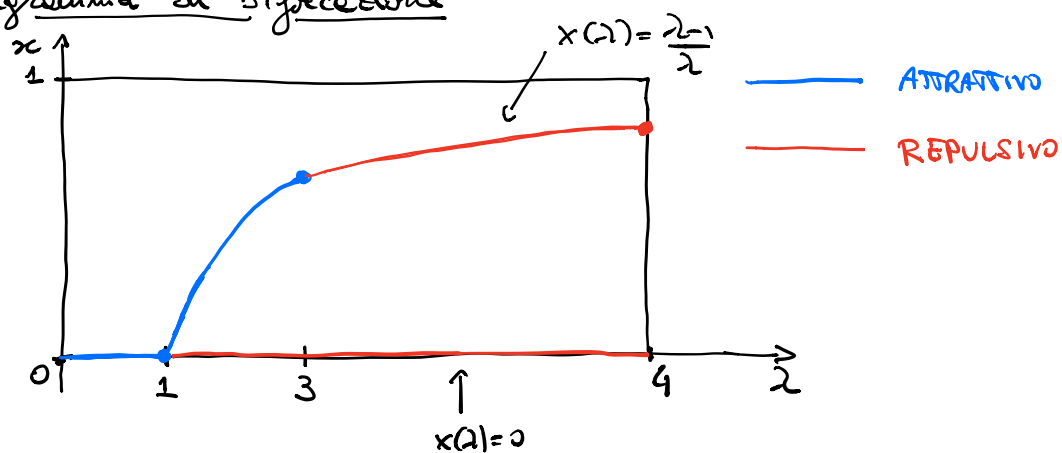
$\frac{\lambda-1}{2} = \bar{x}$ attrattivo per $\lambda \in (1, 3]$
 repulsivo per $\lambda \in (3, 4]$

Per $\lambda=3$, $T_3'(\frac{2}{3}) = -1$ e quindi guardo $ST_3(\frac{2}{3})$.

Prop. $ST_2(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1], \forall \lambda \in (0, 4]$.

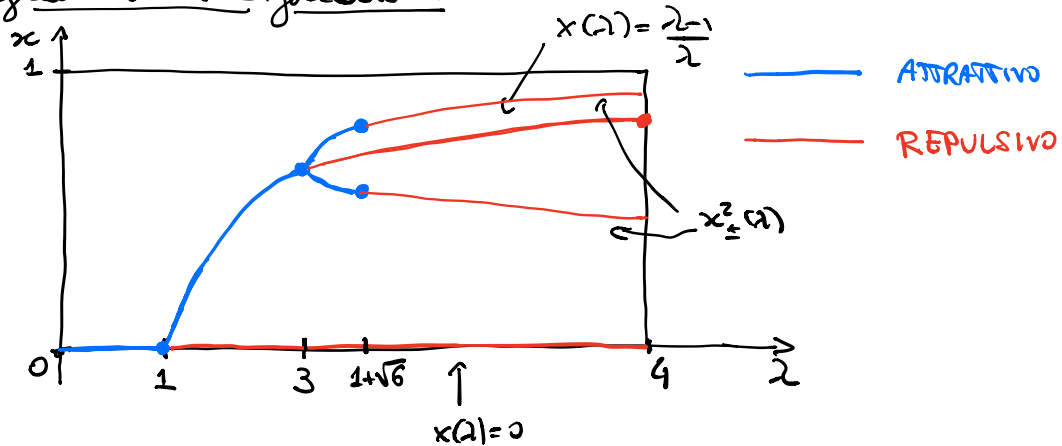
Quindi $\frac{2}{3}$ è attrattivo per T_3 .

Diagramma di biforcazione



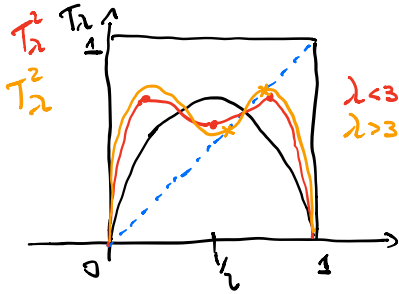
Famiglia logistica $T_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, $\lambda \in [0,4]$

Diagramma di biforcazione



Orbite di periodo 2.

$$T_2^2(x) = T_2(\lambda_{x(1-x)}) = \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x))$$



$$T_\lambda^2(\lambda) = x$$

↑

$$\lambda^2 \times (1-x) (1-\lambda \times (1-x)) = x$$

$$x=0 \quad \text{off.} \quad \lambda^2(1-x)(1-\lambda x(1-x))=1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ opp. } x=\frac{\lambda-1}{\lambda} \text{ opp. } \frac{\lambda^2(1-x)(1-\lambda x(1-x))-1}{x-\frac{\lambda-1}{\lambda}}=0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 0, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{1+\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda} \right\}$$

$$x_{\pm}^2(\lambda) \text{ exist} \Leftrightarrow \lambda \geq 3$$

$$e \quad x_{\pm}^2(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 3^+} \frac{2}{3} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Se $\lambda > 3$ ho un'orbita periodica di periodo minimo 2

$$\mathcal{O} = \{x_+^2(\lambda), x_-^2(\lambda)\}$$

La stabilità di $\mathcal{O}$ dipende dalla stabilità di $x_{\pm}^2(\lambda)$ per T_{λ}^2 .

$$\begin{aligned} |(T_{\lambda}^2)'(x_{\pm}^2(\lambda))| &= |T_{\lambda}'(x_+^2(\lambda))| \cdot |T_{\lambda}'(x_-^2(\lambda))| = \\ &= |4 + 2\lambda - \lambda^2| \leq 1 \iff \lambda \in [3, 1+\sqrt{6}] \end{aligned}$$

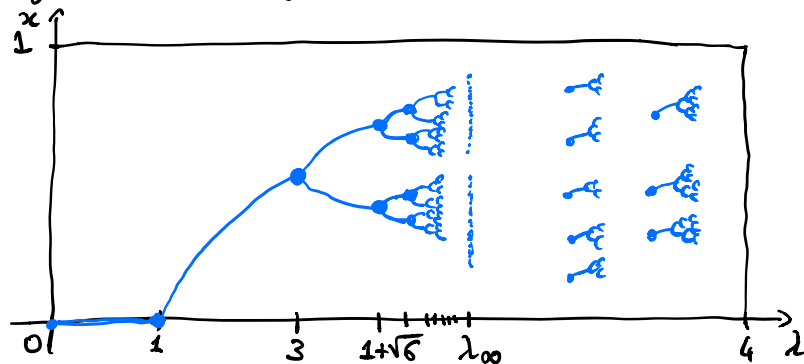
$$\text{Per } \lambda = 1+\sqrt{6}, (T_{\lambda}^2)'(x_{\pm}^2(\lambda)) = -1.$$

Quindi $\mathcal{O}$ è $\begin{cases} \text{attraente} & \lambda \in (3, 1+\sqrt{6}) \\ \text{repulsivo} & \lambda \in (1+\sqrt{6}, 4) \end{cases}$

$$\text{Per } \lambda = 1+\sqrt{6} \text{ studio } (S T_{\lambda}^2)'(x_{\pm}^2(\lambda)) < 0$$

$\Rightarrow \mathcal{O}$ è attrattiva.

Diagramme di biforcazione



$$\lambda_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \quad \text{dove } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1+\sqrt{6}$$

con λ_n valore di biforcazione in cui posso o avere un'orbita attrattiva di periodo 2^{n-1} ed avere un'orbita

attrattiva di periodo 2^m .

In particolare per T_{λ_∞} le orbite convergono verso un insieme Λ_∞ t.c. $T(\Lambda_\infty) = \Lambda_\infty$ e la dinamica su Λ_∞ non è periodica.

Prop. Esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} =: \delta$ COSTANTE DI FEIGENBAUM

(Esistono fenomeni di universalità per δ).

Prop. Sia $T_2: [0,1] \rightarrow [0,1]$ mappa unimodale ($T_2 \in C^2$, crescente su $[0, \frac{1}{2}]$ e decrescente su $[\frac{1}{2}, 1]$, $T_2'(\frac{1}{2}) = 0$ o $x = \frac{1}{2}$). Se $(ST_2)(x) < 0$ allora:

- (i) esiste al più un'orbita periodica attrattiva;
- (ii) quasi ogni punto di $[0,1]$ ha orbite convergenti verso l'orbita periodica attrattiva esistente; $\frac{1}{2}$ ha questa proprietà;
- (iii) $\mu \in \mathbb{R} : T_2$ non ha un'orbita periodica attrattiva $\bar{\epsilon} > 0$ ma questo insieme non contiene intervalli

Esercizi

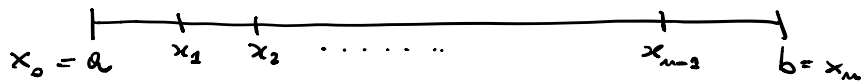
$$T(x) = \frac{1}{2}(x+x^3) \quad x \in [-1, 1]$$

$$T(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x \in [0, 2]$$

$$T(x) = x^2 + \mu \quad x \in \mathbb{R}, \text{ al variare di } \mu.$$

Esistenza di orbite periodiche

$T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua



Sia J una partizione di $[a, b]$ in un numero finito di intervalli

$$J_i = [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, \dots, m-1.$$

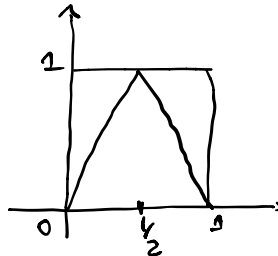
Def. Data la partizione J e due intervalli J_h e J_k ,

si dice che J_h RICOPRE J_k m -VOLTE, $m \geq 1$, se

$\exists K_1, \dots, K_m$ ^{intervalli} aperti contenuti in J_h t.c.

$$K_i \cap K_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \text{e} \quad T(\overline{K_i}) = J_k.$$

Esempio $T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$



$$J_0 = [0, \frac{1}{2}], \quad J_1 = [\frac{1}{2}, 1].$$

J_0 ricopre J_0 una volta $\left[K = (0, \frac{1}{4}) , \quad T(\overline{K}) = \overline{(0, \frac{1}{2})} \right]$

" " J_1 una volta $\left[K = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) , \quad T(\overline{K}) = \overline{(\frac{1}{2}, 1)} \right]$

J_1 ricopre J_0 una volta

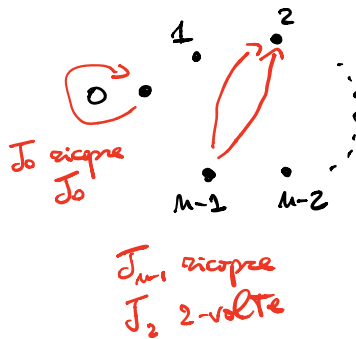
" " J_1 una volta

Def. Sia J una partizione come sopra, si chiama

T-GRADO DI J il grafo i cui nodi sono gli

indici degli elementi di J , ed esiste un arco orientato

Tutto da h a k se J_h ricopre J_k almeno una volta. Inoltre ci saranno un arco da h a k se J_h ricopre J_k m -volte.



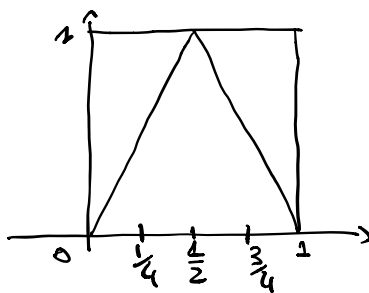
Esempio Mappe Tende



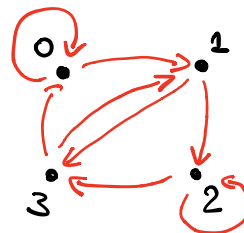
Def. Date una partizione J e il suo T -grafo, un CAMMINO AMMISSIBILE DI LUNGHEZZA $S \geq 1$ è una successione $J_{p(1)} J_{p(2)} \dots J_{p(S)}$ dove $p(j) \in \{\text{indici degli elementi di } J\}$ e v.c. esiste un arco da $p(i)$ a $p(i+1)$ $\forall i=1, \dots, S-1$.

Esempio Mappe Tende. Ogni cammino è ammissibile.

Esempio



$$\begin{aligned}
 J_0 &= [0, \frac{1}{4}] & J_1 &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\
 J_2 &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] & J_3 &= [\frac{3}{4}, 1]
 \end{aligned}$$



Il cammino $J_0 J_0 J_1 J_0$ non è ammissibile

" $J_0 J_0 J_1 J_2 J_2 \dots J_2 J_3 J_1 J_3 J_1 J_3 J_0$
 è ammissibile

Proposizione Sia $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua, sia J una partizione finita di $[a, b]$ in intervalli chiusi, e sia $J_{p(1)} J_{p(2)} \dots J_{p(s)} J_{p(1)}$ un cammino ammissibile di lunghezza $s+1$. Allora esiste $x \in J_{p(1)}$ periodico di periodo s e v.c. $T^i(x) \in J_{p(i+1)} \forall i=0, \dots, s-1$, $T^s(x) = x$.

dim Poniamo $K_{s+1} = \overset{\circ}{J}_{p(1)}$. Il cammino è ammissibile quindi esiste $K_s \in J_{p(s)} \forall.c. T(K_s) = K_{s+1}$, inoltre esiste $K_{s-1} \in J_{p(s-1)} t.c. T(K_{s-1}) = K_s$, e quindi $\forall j=1, \dots, s-1 \exists K_j \in J_{p(j)} \forall.c. T(K_j) = K_{j+1}$.

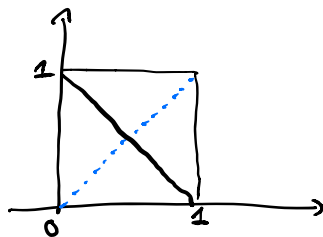
Quindi $\exists K_1 \in J_{p(1)} \forall.c. T^s(K_1) = K_{s+1} = \overset{\circ}{J}_{p(1)} \supset K_1$.

Applico il Teorema del punto fisso a $T^s|_{K_1}$, e quindi esiste un punto fisso $x \in K_1$ per T^s .

Dunque $T^s(x) = x$ e $T^i(x) \in T^i(K_1) \subset J_{p(j+1)}$ per ogni $j=1, \dots, s-1$. $\square$

Un cammino ammissibile $J_{p(1)} J_{p(2)} \dots J_{p(s)} J_{p(1)}$ si chiama cammino chiuso.

Esempio Se $x \in J_0 \cap J_1$ e $T(x) = x$, allora il cammino ammissibile $J_0 J_1 J_0 J_1 J_0$ potrebbe avere punto y che soddisfa $T^4(y) = y$ dato che $y = x$, oppure y potrebbe avere periodo minimo 2.



$$T(x) = 1 - x$$

$$J_0 = [0, \frac{1}{2}], \quad J_1 = [\frac{1}{2}, 1]$$



Il cammino ammissibile 01010 mi corrisponde un punto fisso per T^4 ma qui punto $\neq \frac{1}{2}$ è periodico di periodo minimo 2.

Teorema di Sharkovsky

Sia $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua, e consideriamo
 $(\mathbb{N}, \prec)$ dove

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^h \prec 2^{h+1} \prec \dots$$

$$\dots \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec$$

$$\prec \dots \prec 2h+3 \prec 2h+1 \prec \dots \prec 11 \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Se T ha un punto periodico di periodo minimo m ,
allora T ha un punto periodico di periodo minimo n
per ogni $n \prec m$.

Proposizione Sia $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua, e supponiamo che
 T abbia un punto periodico di periodo minimo m , con
 m dispari, e T non abbia punti periodici di periodo minimo
dispari in $(1, m)$. Allora T ha un punto fisso, ha
un punto periodico di periodo minimo $n \forall n > m$, ha
un punto periodico di periodo minimo $n \forall n < m$ e pari.
(Allora T ha un punto periodico di periodo minimo n
 $\forall n \prec m$).

dim Siano $P_1, P_2, \dots, P_m$ i punti dell'orbita periodica

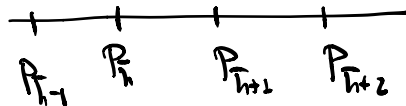


$$J_0 = [a, p_1], \quad J_i = [p_i, p_{i+1}], \quad i = 1, \dots, m-1, \quad J_{m-1} = [p_m, b].$$

Si ha $T(p_1) > p_1$ e $T(p_m) < p_m$. Quindi $\exists \bar{h}$ t.c.

$$T(p_{\bar{h}}) > p_{\bar{h}} \quad \text{ma} \quad T(p_k) < p_k \quad \forall k = \bar{h}+1, \dots, m.$$

• $n=1$ $J_{\bar{h}} = [p_{\bar{h}}, p_{\bar{h}+1}]$ è v.c. $T(p_{\bar{h}}) > p_{\bar{h}}$, $T(p_{\bar{h}+1}) < p_{\bar{h}+1}$



Non può capitare che $T(p_{\bar{h}}) = p_{\bar{h}+1}$ e $T(p_{\bar{h}+1}) = p_{\bar{h}}$, quindi

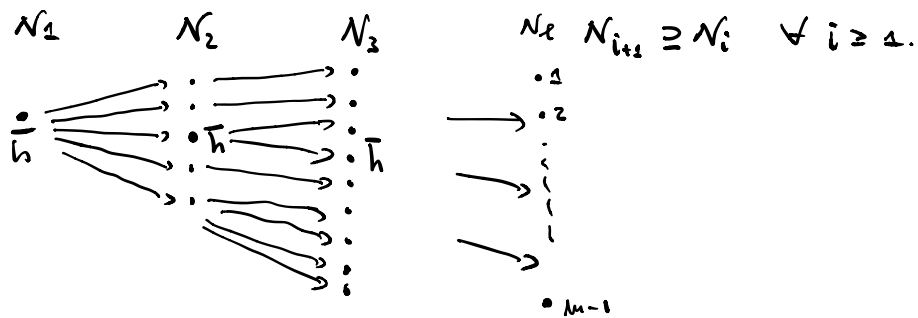
$J_{\bar{h}}$ ricopre sé stesso. Quindi nel T-grafo di J ,

$$\overset{\circ}{J}_{\bar{h}} \Rightarrow J_{\bar{h}} J_{\bar{h}} \text{ è ammissibile} \Rightarrow \text{esiste un punto fisso in } \overset{\circ}{J}_{\bar{h}}.$$

- Nel T-grafo di J esiste un cammino ammissibile da $J_{\bar{h}}$ a J_k $\forall k = 1, \dots, m-1$, della forma $J_{\bar{h}} J_{p(s)} J_{p(s)} \dots J_{p(s)} J_k$.

$$N_1 = \{\bar{h}\}, \quad N_2 = \{r \in \{1, \dots, m-1\} : J_{\bar{h}} \text{ ricopre } J_r\}$$

$$\text{e } \forall i \geq 3, \quad N_i = \{r \in \{1, \dots, m-1\} : \exists s \in N_{i-1} \text{ v.c. } J_s \text{ ricopre } J_r\}$$

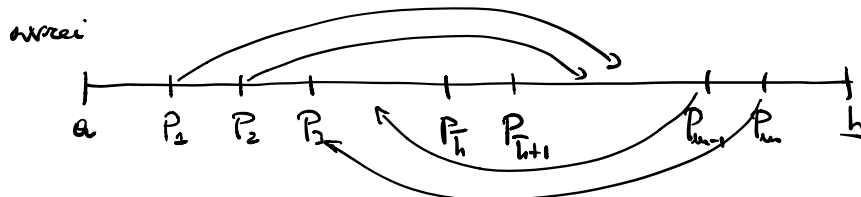


Quindi $\exists l$ t.c. $N_{l+1} = N_l$ e $N_l = \{1, \dots, m-1\}$, e

ho finito, oppure $N_l \subsetneq \{1, \dots, m-1\}$ ma è assurdo perché implica che il periodo dell'orbita periodica $\{p_1, \dots, p_m\}$ è minore di m .

- Esiste $k \in \{1, \dots, m-1\} \setminus \{h\}$ t.c. J_k ricopre J_h .

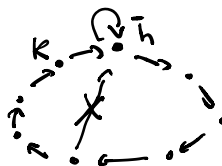
Se per assurdo nessun J_k ricopre J_h (per $k \neq h$)



in particolare $T\{p_1, \dots, p_h\} \subseteq \{p_{h+1}, \dots, p_m\}$ e

$T\{p_{h+1}, \dots, p_m\} \subseteq \{p_1, \dots, p_h\}$. Questo implica un peri.

- Il T -grafo di T contiene un cammino chiuso ammissibile da J_h in $\tilde{\pi}$ steno che contiene $J_k \forall k \in \{1, \dots, m-1\}$, e inoltre esiste un unico arco orientato da J_k a J_h con $k = h$.



Mostriamo che se $J_h J_{p(2)} \dots J_{p(s)} J_h$ è ammissibile allora

$s = m-1$. Supponiamo per assurdo che $s < m-1$

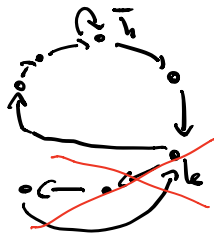
Allora se s è dispari, esiste $x \in J_h$ v.c. $T^s(x) = x$
 quindi esiste orbita periodica di periodo minimo dispari
 minore di m , falso.

Se s è pari, $s \leq m-2$, quindi considero

$J_h J_{p(2)} \dots J_{p(s)} J_h J_h$, cammino ammissibile chiuso di
 lunghezza $s+2$ quindi $\exists x \in J_h$ v.c. $T^{s+1}(x) = x$,
 $s+1 < m$ dispari, falso.

Sappiamo quindi che il cammino chiuso ammissibile da
 J_h in se stesso è $J_h J_{p(2)} \dots J_{p(m-1)} J_h$.

Se un J_h appare due volte ($k \neq l$) nel cammino,



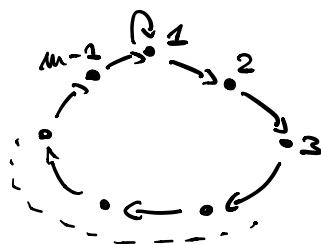
ma allora trovo un cammino più breve da J_h in se stesso

Se $\exists k_1, k_2$ con $k_1 \neq k_2$ v.c. $J_{k_1} \in J_{k_2}$ ricorrono J_h ,
 allora



troverei un cammino più breve da J_h in se stesso.

Quindi in definitiva la struttura del T-grafo di J relativamente a $J_1, \dots, J_{m-1}$ è



zinomamente $J_h = I_1$

I_j l'insieme rispetto da I_{j-1} .

- $\forall n > m$ Dal T-grafo, ogni cammino del tipo $\underbrace{I_1 I_2 \dots I_{m-1} I_1 I_1 \dots I_1}_{m+1 > m+1}$ è ammissibile, quindi

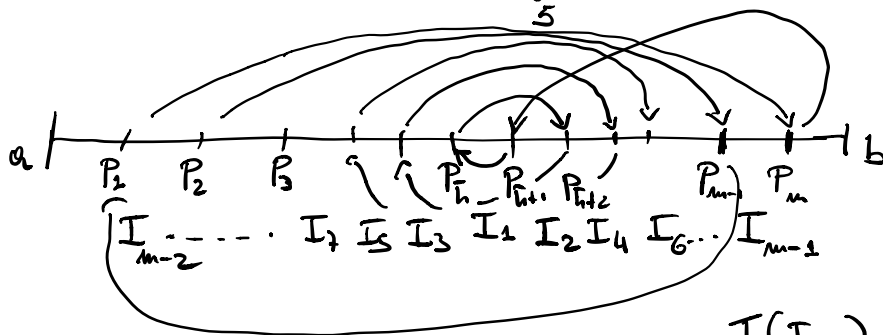
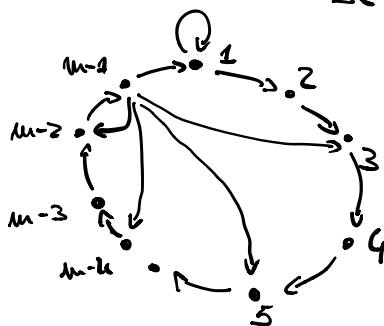
$\exists x \in I_2 \forall c \quad T^m(x) = x$ e m è periodo minimo

- $\forall m \text{ pari} < m$ I_{m-1} ricopre $I_k \forall k$ dispari

Se $m=3$.



Se $m > 3$,

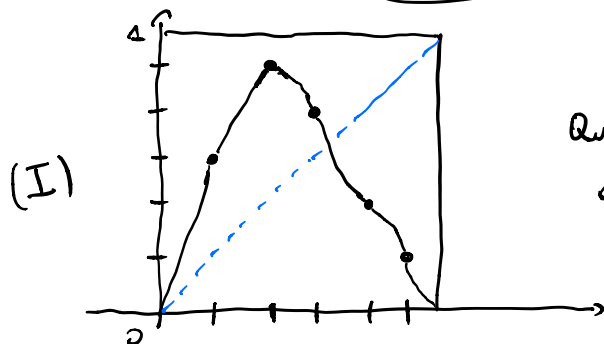
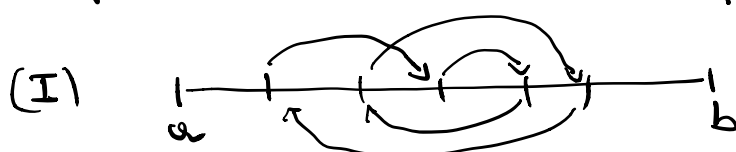


$$T(I_{m-1}) = [p_2, p_{h+1}]$$

Quindi posso costruire cammini ammissibili chiusi del
 tipo $I_{m-1} I_j I_{j+1} \dots I_{m-1}$ di lunghezza $m+1 \ \forall m \text{ pari} < m$
 quindi $\exists x \in I_{m-1}$ s.c. $T^m(x) = x$ e m è periodo minimo.

□

Oss $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con un'orbita periodica di
 periodo 5 e non ha orbite di periodo 3, allora



Questa T ha orbite periodiche
 di ogni periodo $n \neq 3$.

dim Supponiamo che T abbia un'orbita di periodo
 minimo m e non ne abbia di periodo $m' < m$.

Se m è dispari, uso la proposizione.

Se m è pari. Supponiamo che $m = 2 \cdot \tilde{m}$ con
 $\tilde{m}$ dispari. Allora posso seguire la dimostrazione
 della proposizione, fino a mostrare che

$\exists J_h$ che ricopre se stesso ed esistono cammini
enumerabili da J_h a $J_k \quad \forall k \in \{1, \dots, m-1\} \cup \{l\}$.

Adesso si ottiene che invece $T\{p_2, \dots, p_k\} = \{p_{h+1}, \dots, p_m\}$
e $T\{p_{h+1}, \dots, p_m\} = \{p_2, \dots, p_k\}$, quindi $h = \tilde{m}$ e

T^2 ha un'orbita di periodo $\tilde{m}$ dispari. Applico la
proposizione a T^2 .

Se invece $m = 2^r \tilde{m}$ con $r > 1$ e $\tilde{m}$ dispari, ripeto il
ragionamento e ho T^{2^r} ha orbita di periodo $\tilde{m}$.

□

"CAOS" TOPOLOGICO

$T: X \rightarrow X$ continua, X sp. metrico compatto

Def. T si dice CAOTICA nel senso di DEVANEY se

$\exists \Lambda \subseteq X$ compatto e positiv. invariante f.c.

(i) l'insieme dei punti periodici è denso in Λ ;

(ii) T è "topologicamente transitiva" in Λ

(ossia $\forall U, V$ aperti f.c. $U \cap \Lambda \neq \emptyset, V \cap \Lambda \neq \emptyset$,

$\exists n = n(U, V)$ t.c. $T^n(U \cap \Lambda) \cap (V \cap \Lambda) \neq \emptyset$);

(iii) T ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali (ossia $\exists c > 0$ t.c. $\forall x \in \Lambda$ e $\forall \varepsilon > 0$

$\exists y \in B_\varepsilon(x) \cap \Lambda$ per cui $\exists n = n(x, y)$ f.c.

$d(T^n(x), T^n(y)) > c$).

Esempi • Shift $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ dove $\Omega = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}_0}$

$\Omega = \{ \omega = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) : \omega_i \in \{1, \dots, N\} \forall i \geq 0 \}$

$(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}$ $d(\omega, \tilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta(\omega_i, \tilde{\omega}_i)}{2^i}$

(i) I punti periodici di σ sono $\omega = (\bar{s})$ dove

$s = (s_1, \dots, s_k) \in \{1, \dots, N\}^k$

$\omega = (s_1 \dots s_k s_1 \dots s_k \dots)$

Scelto $\tilde{\omega} \in \Omega$, voglio mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \omega$ periodico

t.c. $d(\omega, \tilde{\omega}) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \omega$ periodico t.c.

$\tilde{\omega}_i = \omega_i \quad \forall i = 0, \dots, k(\varepsilon).$

Fissato ε , scelgo $\omega = (\overline{\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_1 \dots \tilde{\omega}_{k(\varepsilon)}})$ periodico.

(i) Dimostrare per C_1 e C_2 cilindri della

forma $C_1 = \{\omega \in \Omega : \omega_i = s_i \ \forall i=0, \dots, k_1\}$ con
 $r^2 = (s_0, \dots, s_{k_1}) \in \{1, \dots, N\}^{k_1+1}$ e

$C_2 = \{\omega \in \Omega : \omega_i = r_i \ \forall i=0, \dots, k_2\}$ con
 $r^2 = (r_0, \dots, r_{k_2}) \in \{1, \dots, N\}^{k_2+1}$.

Serve che $\exists$ n. t.c. $\sigma^n(C_1) \cap C_2 \neq \emptyset$. Mi
 basta mostrare che $\exists \omega \in C_1$ t.c. $\sigma^n(\omega) \in C_2$, e

scelgo

$$\omega = (\underbrace{s_0 s_1 \dots s_{k_1}}_n * * * \overset{\omega_n \omega_{n+1} \dots}{r_0 r_1 \dots r_{k_2}} * * \dots) \in C_1$$

$$\sigma^n(\omega) = (r_0 r_1 \dots r_{k_2} \dots) \in C_2.$$

(ii) $C = 1$. Scelto $\omega \in \Omega$ mi serve che $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \tilde{\omega} \in B_\varepsilon(\omega)$ t.c. $d(\sigma^n(\omega), \sigma^n(\tilde{\omega})) > 1$ per qualche n.

Fissato $\varepsilon > 0$, $\tilde{\omega} \in B_\varepsilon(\omega) \Leftrightarrow \tilde{\omega}_i = \omega_i \ \forall i=0, \dots, k(\varepsilon)$, quindi

se $\tilde{\omega} = (\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{k(\varepsilon)} * * * \tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_{n+1} * * \dots)$ allora

$$\tilde{\omega}_n \neq \omega_n, \quad \tilde{\omega}_{n+1} \neq \omega_{n+1}$$

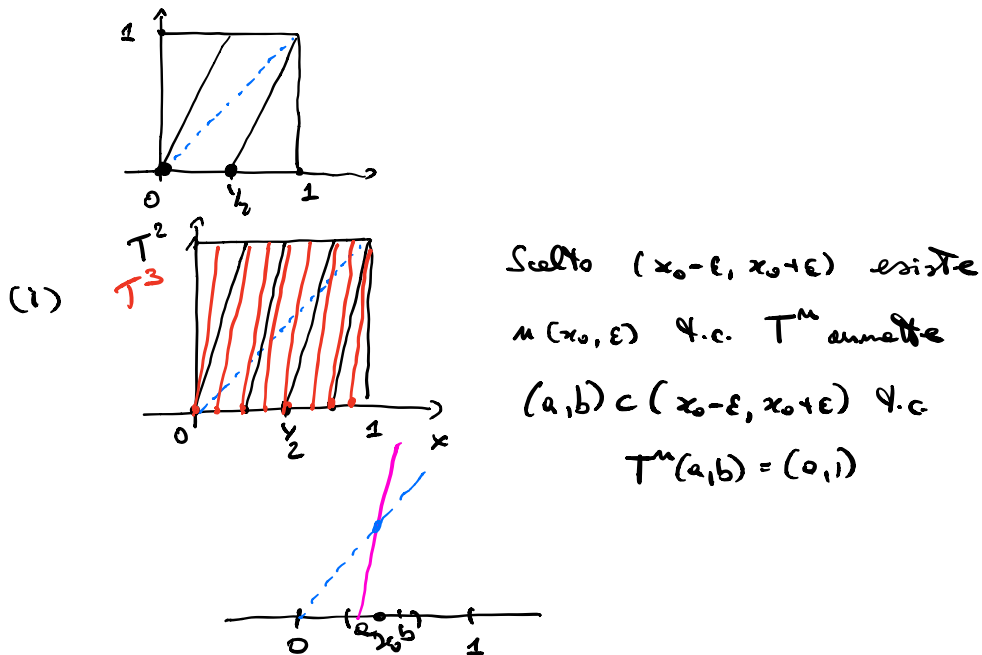
$$\tilde{\omega} \in B_\varepsilon(\omega) \text{ e } \sigma^n(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega}_n \tilde{\omega}_{n+1} \dots)$$

$$\sigma^n(\omega) = (\omega_n \omega_{n+1} \dots)$$

$$\Rightarrow d(\sigma^n(\tilde{\omega}), \sigma^n(\omega)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\delta((\sigma^n(\omega))_i, (\sigma^n(\tilde{\omega}))_i)}{2^i} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} > 1.$$

• Mappa di Bernoulli $T: S^1 \rightarrow S^1 \quad T(x) = \{2x\}$



(ii) Bernoulli $\leftrightarrow$ rappresent. diadica.

Scelto (a, b) , $T(a, b)$ ha lung. doppia.
 Quindi $\exists$ m t.c. $T^m(a, b)$ ricopre $(0, 1)$.

(iii) $c = \frac{1}{4}$ $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ $x_i \in \{0, 1\}$

Scelto $\epsilon > 0$, $y \in B_\epsilon(x)$ $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}$ con
 $y_i = x_i \quad \forall i = 0, \dots, k$ t.c. $2^{-k} < \epsilon$.

Preso $n > k+1$, scelgo y_{n+1}, y_{n+2} in modo che

$$y_{n+1} \neq x_{n+1}, \quad y_{n+2} = x_{n+2}$$

$\Rightarrow d(T^n(x), T^n(y)) > \frac{1}{4}$

Def. Un insieme $S \subset X$ si dice (n, ε) -SEPARATO per $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, se $\forall x, y \in S \exists 0 \leq k \leq n$ t.c. $d(T^k(x), T^k(y)) > \varepsilon$.

Si chiama ENTROPIA TOPOLOGICA la quantità

$$h_{\text{top}}(T) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\max \{ \#S : S \text{ } (n, \varepsilon)\text{-sep.} \} \right)}_{h(\varepsilon, T)}$$

Oss $\varepsilon \mapsto h(\varepsilon, T)$ è decrescente su $(0, +\infty)$.



Def. T è costante se $h_{\text{top}}(T) > 0$.

Esempio: • Shift. Fissato $\varepsilon > 0$, $d(\omega, \tilde{\omega}) > \varepsilon$ se $\exists 0 \leq i \leq h(\varepsilon)$ t.c. $\omega_i \neq \tilde{\omega}_i$.

Quindi ω e $\tilde{\omega}$ sono in un insieme (n, ε) -separato
se e solo se $\exists 0 \leq k \leq n$ t.c. $d(\sigma^k(\omega), \sigma^k(\tilde{\omega})) > \varepsilon$
 $\Leftrightarrow \exists 0 \leq i \leq n + h(\varepsilon)$ t.c. $\omega_i \neq \tilde{\omega}_i$.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}_0} \\ \max \{ \#S \mid S \text{ } (n, \varepsilon)\text{-sep.} \} &= N^{n+h(\varepsilon)+1} \\ &= \# \{1, \dots, N\}^{n+h(\varepsilon)+1} \end{aligned}$$

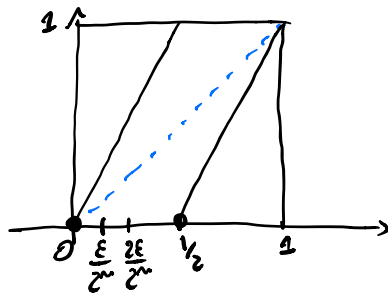
$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(\sigma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (N^{n+h(\varepsilon)+1}) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+h(\varepsilon)+1}{n} \log N \right) = \log N \end{aligned}$$

Prop. L'entropia topologica $\bar{h}$ è invariante per omiegio topologico.

• $h_{\text{top}}(T_{S=2}) = h(T_{\lambda=1/2}) = \log 2$
 mappa 2-to-1 fun. log.

• Mappe di Bernoulli

Fissiamo n ed ε , dividiamo $\mathbb{S}^1$ in S (n, ε) -sep.



$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$x_3 = \frac{2\varepsilon}{2^n}$$

$$x_k = \frac{k\varepsilon}{2^n}$$

$$K = \frac{2^{n-2}}{\varepsilon}$$

$n=1$ $0, \varepsilon_2 > 0$ $(1, \varepsilon)$ -sep.

$$\mathcal{O}(0) = \{0\}, \quad \mathcal{O}(\varepsilon_2) = \{\varepsilon_2, \varepsilon\}$$

$$h_{\text{top}}(T) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(2^{n-2} \frac{1}{\varepsilon} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} [(n-2) \log 2 - \log \varepsilon] = \log 2$$

• Rotazioni

$$T: S^1 \rightarrow S^1 \quad S^1 = [0,1] / \sim$$

$$T(x) = \{x + \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(I) $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ogni orbita $\bar{x}$ periodica, ma T non $\bar{x}$ topologicamente transitiva.

$$U = (0, \frac{1}{39})$$



$$V = (\frac{2}{39}, \frac{1}{9})$$

(II) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Non esistono orbite periodiche,
 T è topologicamente transitiva.

Per l'entropia topologica, T è un'isometria.

$$d(Tx, Ty) = d(x, y). \text{ Quindi}$$

$\#S$ con S (n, ε) -sep. non dipende da n .

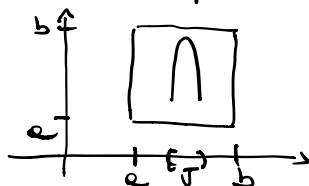
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left(\max \{ \#S \mid S \text{ è } (n, \varepsilon)\text{-sep.} \} \right) = 0$$

$$\Rightarrow h_{\text{top}}(T) = 0.$$

- Continuità nel senso di Deveney
 - Entropia Topologica
- $$\left. \begin{array}{l} \text{• Continuità nel senso di Deveney} \\ \text{• Entropia Topologica} \end{array} \right\} T: X \rightarrow X \text{ continua}$$

$T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua

Def. Si dice che T ha un FERRO DI CAVALLO se $\exists J \subset [a, b]$ intervallo chiuso che ricorre se stesso due volte.

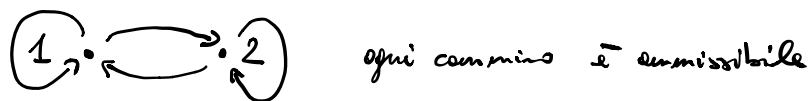


($\exists K_1, K_2$ aperti disgiunti in J v.c. $T(K_1) = T(K_2) = J$).

Prop $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Allora

- Se T ha un ferro di cavallo allora ha un'orbita di periodo minimo $n \forall n \geq 1$.
- Se T ha un punto periodico di periodo minimo n dispari ($n > 1$) allora T^2 ha un ferro di cavallo.

dim (i) $J \subset [a, b]$ e K_1, K_2 disgiunti: $T(K_1) = T(K_2) = J$.



$$K_1 = (\alpha, \beta) \quad K_2 = (\beta + \epsilon, \gamma) \quad \alpha, \beta, \beta + \epsilon, \gamma \in J$$

• $\epsilon > 0 \quad \overline{K_1} \cap \overline{K_2} = \emptyset$

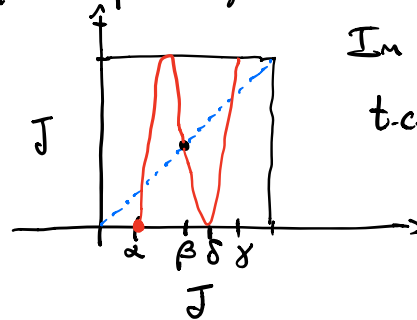
Il cammino $K_1 K_2 K_1 K_2$ di lunghezza 4

e quindi $\exists x \in \overline{K_1}$ t.c. $T^3(x) = x$ e
 $T(x) \in \overline{K_2}$, $T^2(x) \in \overline{K_2}$. Quindi x non è un
 punto fisso, allora x è periodico di periodo
 minimo 3.

• $\varepsilon = 0$, $K_1 = (\alpha, \beta)$ $K_2 = (\beta, \gamma)$

Se β non è punto fisso. Di nuovo $\exists x \in \overline{K_1}$
 t.c. $T^3(x) = x$ e x non è punto fisso. Quindi
 concluso come sopra.

Se β è punto fisso.



In ogni caso $\exists \delta \in (\beta, \gamma)$
 t.c. $T([\delta, \gamma]) = J$.

Scego $K_1 = (\alpha, \beta)$ $K_3 = (\delta, \gamma)$ ho che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \circlearrowleft \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \circlearrowright \end{pmatrix} \text{ e } \overline{K_1} \cap \overline{K_3} = \emptyset.$$

Quindi come sopra concluso che $\exists x \in \overline{K_1}$
 periodico di periodo minimo 3.

Infine applico il Teorema di Sharkovsky. $\square$ (i).

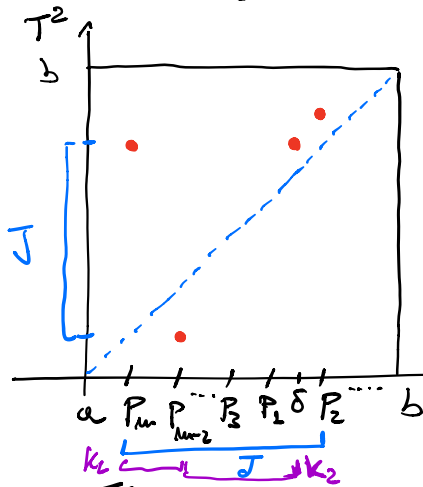
(ii) Sia m periodo minimo dispari con $m > 1$ dell'orbita
 $\{p_1, \dots, p_m\} \subset [a, b]$. Dove $T(p_1) = p_2$, $T(p_2) = p_3, \dots$,
 $T(p_{m-1}) = p_m$, $T(p_m) = p_1$.

Supponiamo che T non abbia orbite periodiche di periodo
 minimo dispari $1 < m' < m$.

Allora vale

$$a \leq p_m < p_{m-2} < p_{m-4} < \dots < p_5 < p_3 < p_1 < p_2 < p_4 < \dots < p_{m-3} < p_{m-1} \leq b$$

o la situazione simmetrica.



$$T(p_1, p_2) = (p_3, p_2)$$

Quindi (p_1, p_2) ricopre π stesso ed $\exists \delta \in (p_1, p_2)$

t.c. $T(\delta) = p_2$, quindi

$$T^2(\delta) = p_2.$$

$$T(p_m) = p_1, \text{ quindi } T^2(p_m) = p_2$$

$$T(p_{m-2}) = p_{m-1}, \text{ quindi } T^2(p_{m-2}) = p_m$$

Noto che $J = [p_m, p_2]$ ricopre π stesso due volte per T^2 .

$$k_1 = (p_m, p_{m-2}), \quad k_2 = (p_{m-2}, \delta) \quad . \quad \square \text{ (ii).}$$

"Periodo 3 implica caos"

Def. Una mappa $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua è CAOTICA se $\exists n \geq 1$ t.c. T^n ha un fuoco di cavallo.

Teorema Supponiamo $T: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Allora sono equivalenti:

(i) T è caotica nel senso di Devaney

(ii) $h_{\text{top}}(T) > 0$

(iii) T è caotica (nel senso del ferro di cavallo)

(iv) T ha un'orbita periodica di periodo minimo non potenza di 2.

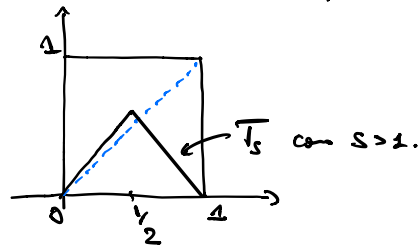
Example

$$T_s: [0,1] \rightarrow [0,1]$$

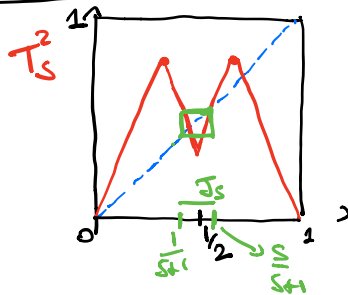
$$s \in [0,2]$$

$$T_s(x) = \begin{cases} sx & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ s(1-x) & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

T_s è caotica $\forall s > 1$.



$s \in [\sqrt{2}, 2]$ T_s^2 ha un ferro di cavallo.



$$J_s = \left[\frac{1}{s+1}, \frac{s}{s+1} \right] \ni \frac{1}{2}$$

$$T_s^2\left(\frac{1}{2}\right) = T_s\left(\frac{s}{2}\right) = s\left(1 - \frac{s}{2}\right) \leq \frac{1}{s+1}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$s \geq 1 \quad \quad \quad s \geq \sqrt{2}$$

$$T_s^2\left(\frac{s}{s+1}\right) = T_s\left(s\left(1 - \frac{s}{s+1}\right)\right) = T_s\left(\frac{s}{s+1}\right) = \frac{s}{s+1}$$

$$T_s^2\left(\frac{1}{s+1}\right) = T_s\left(\frac{s}{s+1}\right) = \frac{s}{s+1}$$

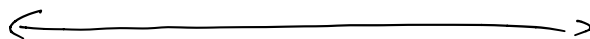
Quindi $\exists K_1 = \left(\frac{1}{s+1}, x_1\right)$, $K_2 = \left(x_2, \frac{s}{s+1}\right)$ v.c.

$$T_s^2(K_1) = J_s = T_s^2(K_2)$$

$s \in (1, \sqrt{2})$

Gluing (T_s si può rinormalizzare)

$T_s \sim T_{s'} su un intervallo$



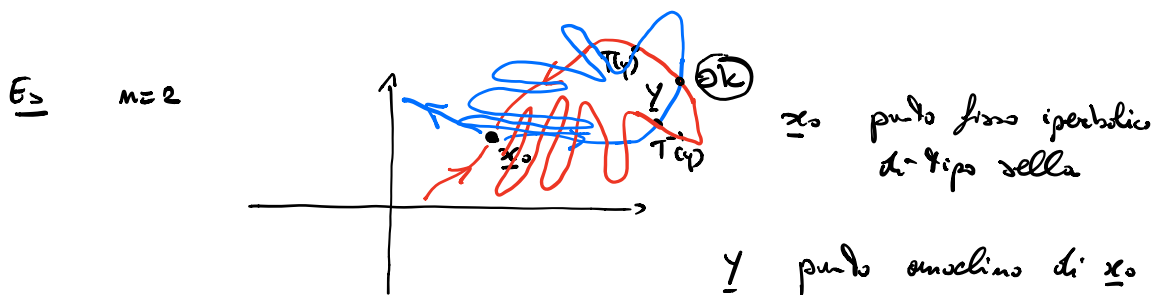
Sistemi dinamici discreti in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$T: X \rightarrow X$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ opp. X è una varietà di dim $n \geq 2$.
invertibile

Def. x_0 punto fisso è iperbolico se $DT(x_0)$ non ha autovalori di modulo 1.

Oss Le "direzioni" in cui x_0 è attrattivo corrispondono agli autovalori di mod < 1 . Le "direzioni" in cui x_0 è repulsivo corrispondono agli autoval. di modulo > 1 .

Teorema delle varietà stabile e instabile Analog.



Teorema (Smale-Birkhoff) Sia $T: X \rightarrow X$ un diffeomorfismo di una varietà X di dim n , e se $x_0 \in X$ un punto fisso iperbolico di T . Se esiste un punto y smelino di x_0 t.c. $W^u(x_0)$ e $W^s(x_0)$ si intersecano trasversalmente in y e $\dim W^u(x_0) + \dim W^s(x_0) = n$, allora $\exists A \subset X$ totalmente invariante per T t.c. $T|_A$ è coniugata topologicamente allo shift $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ con $\Omega = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$, $N \in \mathbb{N}$.

Metodo di Melnikov

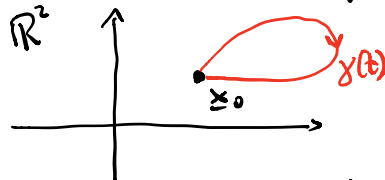
Sia $\dot{x} = F(x) + \varepsilon H(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}^2$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia periodica di periodo T in t .

Considera
$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) + \varepsilon H(x, t) \\ \dot{t} = 1 \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3$$

Sezione di Poincaré $\Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{T\}$.

Supponiamo che per $\varepsilon = 0$, il sistema $\dot{x} = F(x)$ abbia un punto fisso x_0 di tipo sella con orbite omocline $y(t)$.



Teorema Sia $M(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} F(y(t-\tau)) \wedge H(y(t-\tau), t) dt$

$$\left[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} := f(x) h_2(x, t) - g(x) h_1(x, t) \right].$$

Se per $\varepsilon > 0$ M ha zeri semplici, allora la mappa di Poincaré $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ha un punto fisso iperbolico con un punto omoclinico con intersezione trasversale di varietà stabile e instabile.

